поглощения света. Но если свет обладает импульсом, то при его излучении излучающее тело A должно испытывать *отдачу*. Иначе процесс излучения света сопровождался бы нарушением закона сохранения импульса.

Эти рассуждения можно облечь в количественную форму и прийти к важным соотношениям. Допустим, что на полностью поглощающее тело B нормально к его поверхности падает параллельный пучок света. Опытами Лебедева было показано, что давление π, оказываемое светом на единицу площади тела B, равно объемной плотности энергии падающего пучка. Обозначим l длину, а S — площадь поперечного сечения падающего пучка. Тогда $\pi = \frac{\varepsilon}{Sl}$, где ε — энергия пучка. Сила, действующая на тело B, равна $F = \pi S = \varepsilon/l$. Она действует в течение времени $\tau = l/c$ (c — скорость света в вакууме), сообщая телу импульс $p = F\tau = \varepsilon/c$ (см. § 18). Это и есть импульс света, поглощенного телом B. Итак, свет, распространяющийся в определенном направлении, обладает импульсом

$$p = \frac{\varepsilon}{c}. \tag{13.1}$$

Поскольку распространение идет со скоростью c, целесообразно представить импульс в виде $p = mc$, рассматривая величину m как *массу света*. Она равна

$$m = \frac{\varepsilon}{c^2}. \tag{13.2}$$

Соотношение (13.2) получено здесь для энергии света. Теория относительности показала, что оно справедливо для любых видов энергии. В таком расширенном понимании соотношение (13.2) выражает фундаментальный закон Эйнштейна о *взаимосвязи между массой и энергией*.

6. В механике нам не придется сталкиваться с явлениями, в которых проявляются импульсы полей. Мы ограничимся изучением только таких явлений, для которых третий закон Ньютона и закон сохранения импульса в их старом — ньютоновском — смысле выполняются.

§ 14. Роль начальных условий

1. Векторное уравнение движения материальной точки (11.3) можно записать в *координатной форме:*

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x, \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y, \qquad m\frac{d^2z}{dt^2} = F_z. \tag{14.1}$$

Одно векторное уравнение (11.3) эквивалентно трем числовым уравнениям (14.1). Все эти уравнения являются *дифференциальными*, а потому их недостаточно для однозначного определения движения материальной точки. Каждое из них есть уравнение *второго порядка.* (Порядок дифференциального уравнения определяется производной высшего порядка, входящей в это уравнение.) По этой причине для однозначного определения движения точки к уравнениям движения надо присоединить дополнительные данные, определяющие значения двух векторных или шести числовых постоянных. В качестве таковых обычно берут значения радиуса-вектора $\boldsymbol{r}$ и скорости $\boldsymbol{v}$ или каких-либо двух функций их в момент времени $t = 0$. Эти значения называются *начальными условиями.* Выясним этот вопрос на примере свободного движения материальной точки в поле тяжести Земли.

2. Галилеем было установлено, что *все тела в пустоте падают с одинаковым ускорением.* Для качественного подтверждения этого положения может служить стеклянная трубка длиной около одного метра, из которой можно откачивать воздух. В трубку помещены различные тела, например, дробинка, кусочек пробки, перышко, кусочки бумаги. Пока трубка не откачана, бумажки и перышко падают во много раз медленнее остальных тел, что объясняется сопротивлением воздуха. Но если воздух из трубки откачать, то все тела начнут падать одинаково быстро. Более точное доказательство дают наблюдения за качаниями маятника: опыт показывает, что период качаний маятника не зависит от материала, из которого он изготовлен. Ускорение g при свободном падении меняется с географической широтой; на полюсе оно максимально и составляет 9,83 м/с^2, на экваторе — минимально и равно 9,78 м/с^2. Величина g уменьшается с высотой над земной поверхностью: при поднятии на один метр она убывает приблизительно на $3 \cdot 10^{-6}$ м/с^2. Для средних широт можно принять, что вблизи земной поверхности $g = 9{,}80$ м/с^2. В расчетах, не требующих особой точности, ускорение свободного падения g может считаться одним и тем же для всей земной поверхности.

На тело в поле тяжести Земли действует сила $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{g}$, а потому уравнение движения (11.8) переходит в

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{g}. \qquad (14.2)$$

Мы пренебрегли всеми силами и учли только силу тяжести. Зависимостью g от географической широты и высоты над земной поверхностью также будем пренебрегать. Короче, ускорение g будем считать постоянным. Уравнение (14.2) эквивалентно двум уравнениям:

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{g}, \qquad \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{v}. \qquad (14.3)$$

Простым дифференцированием нетрудно убедиться, что этим уравнениям удовлетворяют следующие решения:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{g}t + \boldsymbol{v}_0, \qquad \boldsymbol{r} = \frac{1}{2}\boldsymbol{g}t^2 + \boldsymbol{v}_0 t + \boldsymbol{r}_0 \qquad (14.4)$$

при произвольных значениях постоянных векторов $\boldsymbol{r}_0$ и $\boldsymbol{v}_0$. Решение (14.4) является *общим*. Это значит, что любое решение уравнения (14.2) может быть представлено в виде (14.4). Общее решение — это, в сущности, не одно решение, а целое *семейство решений*, зависящее от двух произвольных векторных постоянных $\boldsymbol{r}_0$ и $\boldsymbol{v}_0$. Придавая этим постоянным какие-либо конкретные значения, мы выделяем из этого семейства определенное *частное решение*. Постоянная $\boldsymbol{v}_0$ есть начальная скорость движущейся точки, $\boldsymbol{r}_0$ — радиус-вектор ее в начальный момент времени. В этом легко убедиться, если с помощью формул (14.4) найти значения $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{r}$ при $t = 0$. Постоянные $\boldsymbol{r}_0$ и $\boldsymbol{v}_0$ нельзя определить из дифференциального уравнения движения (14.2), так как при любых значениях этих постоянных выражения (14.4) являются решениями этого уравнения. Величины $\boldsymbol{r}_0$ и $\boldsymbol{v}_0$ определяются *начальными условиями*. В зависимости от значений $\boldsymbol{r}_0$ и $\boldsymbol{v}_0$ движения могут сильно отличаться друг от друга. Тело может подниматься вверх или вниз по прямой линии; оно может описывать параболу, достигая или не достигая ее вершины; дуга параболы может быть изогнута сильнее или слабее и т. д. Получается довольно разнообразный и запутанный класс движений. Заслуга Ньютона, между прочим, и состоит в том, что он подметил, что вся эта сложность исчезает, а все многообразие движений может быть описано единой формулой, не содержащей никаких произвольных постоянных, если от положений и скоростей материальной точки перейти к ее ускорению.

3. Полученные результаты допускают обобщение. Допустим, что имеется система N материальных точек, взаимодействующих между собой и с внешними телами, положение которых предполагается заданным в любой момент времени. Записав математически второй закон Ньютона для каждой материальной точки, мы получим систему N векторных или $3N$ эквивалентных им числовых дифференциальных уравнений второго порядка. Можно показать, что для однозначного решения этих уравнений надо задать $2N$ векторных или $6N$ числовых величин, определяющих начальные значения координат и скоростей материальных точек системы.

ЗАДАЧА

Тело брошено вверх под углом α к горизонту с начальной скоростью $\boldsymbol{v}_0$. Исследовать его движение, пренебрегая сопротивлением воздуха. Найти уравнение траектории, дальность полета и максимальную высоту подъема, считая земную поверхность горизонтальной. При каком угле α дальность полета максимальна?

Решение. Точку земной поверхности, откуда брошено тело, примем за начало координат ($\boldsymbol{r}_0 = 0$). Тогда, как видно из (14.4), движение будет происходить в вертикальной плоскости, в которой лежат векторы $\boldsymbol{g}$ и $\boldsymbol{v}_0$. Примем ее за координатную плоскость XY, направив ось X горизонтально в сторону движения, а ось Y — вертикально вверх. Запишем уравнение (14.4) в проекциях на координатные оси, учтя при этом, что $v_{0x} = v_0 \cos\alpha$, $v_{0y} = v_0 \sin\alpha$:

$$v_x = v_0 \cos\alpha, \qquad v_y = v_0 \sin\alpha - gt,$$

$$x = v_0 t \cos\alpha, \qquad y = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2.$$

Исключая из последних двух уравнений время t, найдем уравнение траектории

$$y = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2\alpha}.$$

Это уравнение параболы. Отсюда находим дальность полета

$$x = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha$$

и максимальную высоту поднятия

$$y_{\text{макс}} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}.$$

Максимальная дальность достигается при $\alpha = 45^\circ$ и равна

$$x_{\text{макс}} = \frac{v_0^2}{g}.$$

§ 15. Принцип относительности Галилея

1. Уравнение, выражающее второй закон Ньютона

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}, \tag{15.1}$$

отчетливо показывает, что этот закон не может быть справедлив в любой системе отсчета. Действительно, ускорение $\boldsymbol{a}$, вообще говоря, имеет разные значения в различных системах отсчета, движущихся относительно друг друга с ускорением. Сила же $\boldsymbol{F}$ не может зависеть от выбора системы отсчета, так как она определяется только взаимными расположениями и относительными скоростями материальных точек системы, а эти величины согласно нерелятивистской кинематике от выбора системы отсчета не зависят. Отсюда следует, что если второй закон Ньютона справедлив в какой-либо системе отсчета, то он не может оставаться справедливым в другой системе отсчета, движущейся относительно первой с ускорением.

2. Допустим, что система отсчета S инерциальна. Рассмотрим вторую систему отсчета S', движущуюся относительно первой поступательно с постоянной скоростью $\boldsymbol{V}$. Пусть известно движение материальной точки в одной из этих систем, например в системе S. Как найти движение той же точки в системе S'? Задача в дорелятивистской ее постановке сводится к нахождению формул, выражающих координаты x', y', z' движущейся точки в системе S' через ее координаты x, y, z в системе S в один и тот же