а ось $Y$ — вертикально вверх. Запишем уравнение (14.4) в проекциях на координатные оси, учтя при этом, что $v_{0x} = v_0 \cos\alpha$, $v_{0y} = v_0 \sin\alpha$:

$$v_x = v_0 \cos\alpha, \qquad v_y = v_0 \sin\alpha - gt,$$
$$x = v_0 t \cos\alpha, \qquad y = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} gt^2.$$

Исключая из последних двух уравнений время $t$, найдем уравнение траектории

$$y = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha}.$$

Это уравнение параболы. Отсюда находим дальность полета

$$x = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha$$

и максимальную высоту поднятия

$$y_{\text{макс}} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}.$$

Максимальная дальность достигается при $\alpha = 45°$ и равна

$$x_{\text{макс}} = \frac{v_0^2}{g}.$$

## § 15. Принцип относительности Галилея

1. Уравнение, выражающее второй закон Ньютона

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}, \tag{15.1}$$

отчетливо показывает, что этот закон не может быть справедлив в любой системе отсчета. Действительно, ускорение $\boldsymbol{a}$, вообще говоря, имеет разные значения в различных системах отсчета, движущихся относительно друг друга с ускорением. Сила же $\boldsymbol{F}$ не может зависеть от выбора системы отсчета, так как она определяется только взаимными расположениями и относительными скоростями материальных точек системы, а эти величины согласно нерелятивистской кинематике от выбора системы отсчета не зависят. Отсюда следует, что если второй закон Ньютона справедлив в какой-либо системе отсчета, то он не может оставаться справедливым в другой системе отсчета, движущейся относительно первой с ускорением.

2. Допустим, что система отсчета $S$ инерциальна. Рассмотрим вторую систему отсчета $S'$, движущуюся относительно первой поступательно с постоянной скоростью $\boldsymbol{V}$. Пусть известно движение материальной точки в одной из этих систем, например в системе $S$. Как найти движение той же точки в системе $S'$? Задача в дорелятивистской ее постановке сводится к нахождению формул, выражающих координаты $x'$, $y'$, $z'$ движущейся точки в системе $S'$ через ее координаты $x$, $y$, $z$ в системе $S$ в один и тот же

момент времени. Начало координат и направления координатных осей можно выбрать произвольно как в системе $S$, так и в системе $S'$. Если координатные системы неподвижны друг относительно друга и отличаются одна от другой только положениями начал и направлениями координатных осей, то преобразование координат есть чисто геометрическая задача. Ее решение известно из аналитической геометрии. Остается только выяснить, что нового вносит в вопрос о преобразовании координат движение одной системы отсчета относительно другой? Для простоты можно принять, что координатные оси $X'$, $Y'$, $Z'$ соответственно параллельны координатным осям $X$, $Y$, $Z$ и что в начальный момент времени $t=0$ начало $O'$ совмещается с началом $O$. Кроме того, можно считать, что скорость $\boldsymbol{V}$ параллельна оси $X$. При этих условиях ось $X'$ все время будет совпадать с осью $X$. Такие упрощения в постановке задачи не лишают ее общности, поскольку переход к общим формулам может быть совершен дополнительным переносом начал координат и поворотом координатных осей.

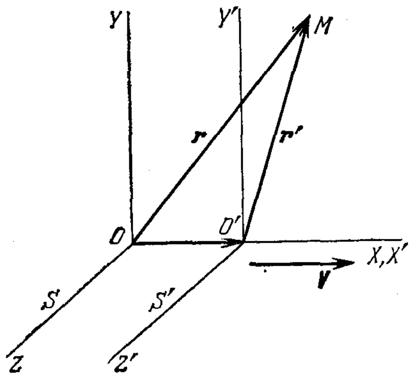


Рис. 26.

Пусть в момент времени $t$ движущаяся точка находится в положении $M$ (рис. 26). Тогда $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$. За время $t$ начало координат системы $S'$ переходит из положения $O$ в положение $O'$, причем $\overrightarrow{OO'} = \boldsymbol{V}t$. Ввиду этого предыдущее соотношение принимает вид

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{V}t', \qquad t = t', \tag{15.2}$$

где $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM}$, $\boldsymbol{r}' = \overrightarrow{O'M}$ — радиусы-векторы движущейся точки в системах $S$ и $S'$ соответственно. Запишем соотношение (15.2) в проекциях на координатные оси:

$$x = x' + Vt', \qquad y = y', \qquad z = z', \qquad t = t'. \tag{15.3}$$

Формулы обратного преобразования имеют вид

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{V}t, \qquad t' = t, \tag{15.4}$$

или в координатной форме

$$x' = x - Vt, \qquad y' = y, \qquad z' = z, \qquad t' = t. \tag{15.5}$$

Эти формулы и дают решение поставленной задачи. Они называются *преобразованием Галилея*. Мы присоединили к формулам преобразования координат дополнительную формулу $t' = t$, чтобы явно отметить, что в нерелятивистской кинематике время считается абсолютным, а потому не преобразуется.

С точки зрения «здравого смысла» преобразование Галилея кажется самоочевидным. Однако в основе его вывода лежит предположение дорелятивистской кинематики об абсолютности длин и промежутков времени. Абсолютность времени явно отмечена в уравнении $t = t'$. При выводе остальных формул использовано предположение об абсолютности длин. Действительно, формулы (15.2), (15.3) и (15.4) были бы самоочевидными, если бы радиусы-векторы $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{r}'$, а с ними и все координаты $x, y, z, x', y', z'$ измерялись в одной и той же системе отсчета, например $S$. Но в действительности формулы предполагают, что «нештрихованные» величины $\boldsymbol{r}$, $x$, $y$, $z$ измеряются в системе $S$, а «штрихованные» $\boldsymbol{r}'$, $x'$, $y'$, $z'$ — в системе $S'$. По этой причине при выводе формул преобразования Галилея без предположения об абсолютности расстояний и промежутков времени обойтись нельзя. Релятивистская физика отказалась от такой абсолютности. Преобразование Галилея она заменила *преобразованием Лоренца*. Этот вопрос будет подробно рассмотрен при изложении теории относительности. Сейчас достаточно отметить, что преобразование Галилея является предельным случаем преобразования Лоренца и получается из последнего, когда скорость $V$ пренебрежимо мала по сравнению со скоростью света в вакууме. При изучении «медленных движений» ($V^2/c^2 \ll 1$) можно пользоваться преобразованием Галилея. В случае «быстрых движений» этого делать нельзя.

**3.** Дифференцируя соотношение (15.2) по времени $t$, получим

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}'}{dt} + \boldsymbol{V} = \frac{d\boldsymbol{r}'}{dt'} + \boldsymbol{V}',$$

или

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{V}, \tag{15.6}$$

где $\boldsymbol{v}$ — скорость точки в системе $S$, а $\boldsymbol{v}'$ — в системе $S'$. Эта формула выражает *нерелятивистский закон сложения скоростей* (в физическом смысле). Она выведена здесь в предположении, что скорость $\boldsymbol{V}$ постоянна. Но формула верна и в случае, когда величина $\boldsymbol{V}$ не постоянна. Однако для целей настоящего параграфа достаточно скорость $\boldsymbol{V}$ считать величиной постоянной.

Дифференцируя второй раз в предположении постоянства $\boldsymbol{V}$, получим

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{v}'}{dt} = \frac{d\boldsymbol{v}'}{dt'},$$

или

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}'. \tag{15.7}$$

Здесь $\boldsymbol{a}$ — ускорение точки в системе $S$, а $\boldsymbol{a}'$ — ускорение той же точки в системе $S'$. Таким образом, ускорение в обеих системах отсчета одно и то же. Говорят, что *ускорение инвариантно относительно преобразования Галилея.*

Свободная материальная точка движется в системе $S$ без ускорения, так как по предположению система $S$ инерциальна. Формула (15.7) показывает, что ее движение в системе $S'$ будет также неускоренным. Следовательно, система $S'$ — тоже инерциальная система отсчета. Таким образом, *система отсчета, движущаяся прямолинейно и равномерно относительно инерциальной системы, сама является инерциальной системой отсчета.* Если существует хотя бы одна инерциальная система отсчета, то существует и бесконечное множество инерциальных систем, движущихся друг относительно друга прямолинейно и равномерно. Сила является функцией только инвариантных величин: разностей координат и разностей скоростей взаимодействующих материальных точек. Поэтому она не меняется при переходе от одной системы отсчета к другой: $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}'$. Иначе говоря, *сила инвариантна относительно преобразования Галилея.* Так как и ускорение инвариантно: $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}'$, то из уравнения (15.1) следует

$$m\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{F}'.$$

Это уравнение выражает второй закон Ньютона в «штрихованной» системе отсчета $S'$. Оно имеет такой же вид, что и в «нештрихованной» системе $S$. Уравнения, остающиеся неизменными при переходе от одной системы отсчета к другой, называются *инвариантными.* Таким образом, *уравнения механики Ньютона инвариантны относительно преобразования Галилея.* Это утверждение называется *принципом относительности Галилея.*

**4.** Принцип относительности Галилея утверждает полное равноправие всех инерциальных систем отсчета. Значит ли это, что одно и то же движение выглядит одинаково во всех инерциальных системах отсчета? Конечно, нет. Движение тела, свалившегося с полки равномерно движущегося вагона, является прямолинейным, если его рассматривать относительно вагона. Но то же движение происходит по параболе в системе отсчета, связанной с полотном железной дороги, хотя законы механики Ньютона одинаковы в обеих системах отсчета. *Движение выглядит по-разному потому, что законы Ньютона выражаются дифференциальными уравнениями, а таких уравнений недостаточно, чтобы полностью определить движение.* Для этого к дифференциальным уравнениям надо присоединить начальные условия — задать начальное положение тела и его начальную скорость. В приведенном примере дифференциальные уравнения движения тела одни и те же в обеих системах отсчета, однако начальные условия разные. В вагоне тело падает с полки с начальной скоростью, равной нулю. В системе отсчета, связанной с полотном железной дороги, то же тело имеет начальную скорость в горизонтальном направлении. Этим и объясняется различный характер движения в обеих системах отсчета. Для того чтобы движение получилось одинаковым, надо в обеих системах отсчета создать одинаковые начальные условия. Это надо понимать в следующем смысле.

Допустим, что имеются две замкнутые системы тел — две большие лаборатории, движущиеся относительно друг друга прямолинейно и равномерно. Каждая из лабораторий может служить системой отсчета. Пусть эти системы инерциальны. Предположим, что обе лаборатории совершенно тождественны, т. е. состоят из одного и того же набора одинаковых тел и оборудованы совершенно одинаково. Явления, происходящие внутри лабораторий, не зависят от того, что происходит в окружающем внешнем мире, так как по предположению лаборатории являются замкнутыми системами. Принцип относительности Галилея утверждает, что *основные механические законы, которыми определяются изменения состояния движения тел, в обеих лабораториях одни и те же*. Под основными механическими законами здесь понимаются законы, однозначно определяющие движение системы по начальным условиям, в которых она находилась, т. е. по значениям координат и скоростей всех материальных точек системы в произвольный момент времени, условно принимаемый за начальный. Если в обеих лабораториях создать одинаковые начальные условия для всех без исключения тел, то все последующие движения их будут протекать совершенно одинаково в обеих лабораториях. Именно в таком смысле понимал принцип относительности сам Галилей. Он писал:

«Уединитесь с каким-нибудь приятелем в просторное помещение под палубой большого корабля и пустите туда мух, бабочек и других подобных мелких летающих насекомых. Пусть там находится также большой сосуд с водой и плавающими в нем рыбками. Подвесьте далее наверху ведерко, из которого капля за каплей вытекала бы вода в другой сосуд с узким горлышком, подставленный внизу. Пока корабль стоит неподвижно, наблюдайте старательно, как мелкие летающие живые существа с одной и той же скоростью летают во всех направлениях внутри помещения. Рыбки, как вы увидите, будут плавать безразлично во все стороны. Все падающие капли будут попадать в подставленный сосуд. Бросая приятелю какую-нибудь вещь, вам не придется применять бо́льшую силу, чтобы бросить ее в одну сторону, чем в другую, если только вещь бросается на одни и те же расстояния. Прыгая двумя ногами, вы сделаете прыжок на одно и то же расстояние, независимо от его направления. Наблюдайте хорошенько за всем этим, хотя у нас не возникает никакого сомнения в том, что, пока корабль остается неподвижным, все должно происходить именно так. Заставьте теперь корабль привести в движение с какой угодно скоростью. Если движение будет равномерным и без качки в ту и другую сторону, то во всех указанных явлениях вы не обнаружите ни малейшего изменения и ни по одному из них не сможете установить, движется ли корабль, или стоит на месте».

Далее Галилей повторяет, как будут протекать на движущемся корабле все явления, описанные выше. Он замечает, в частности, что, если бросить с одинаковой силой (надо было сказать — с одинаковой скоростью относительно корабля) один и тот же предмет сначала к корме, а затем к носу корабля, то в первом случае предмет пройдет относительно пола корабля не большее расстояние, чем во втором, хотя за время, пока предмет находится в воздухе, пол движущегося корабля успеет переместиться на значительное расстояние навстречу предмету. Аналогичные замечания делаются им и в отношении остальных явлений. Отмечая независимость всех явлений, наблюдаемых в закрытом помещении под палубою корабля, от равномерного движения последнего, Галилей приходит к следующему выводу:

«Причина согласованности всех этих явлений в том, что движение корабля обще всем находящимся в нем предметам, также как и воздуху. Поэтому-то я и сказал, что вы должны находиться под палубой».

5. Было бы неправильным давать принципу относительности следующую формулировку: «Если в двух различных инерциальных системах отсчета в начальный момент времени *все без исключения тела и объекты Вселенной* поставить в совершенно одинаковые условия, то в дальнейшем в обеих системах отсчета все явления будут протекать совершенно одинаково». Такое утверждение бессодержательно и не может выражать никакого физического закона. Действительно, если две системы отсчета движутся одна относительно другой, то *все без исключения тела Вселенной* не могут в один и тот же момент времени находиться в них в совершенно одинаковых условиях: скорости одних и тех же тел в этих двух системах отсчета будут разными. Поэтому предпосылка, о которой говорится в приведенной (неправильной) формулировке, не может быть выполнена, поскольку она имеет в виду все без исключения тела Вселенной. Принцип относительности (в правильной формулировке) является не тривиальным физическим законом потому, что в нем речь идет не о явлениях во всей Вселенной, а о явлениях внутри *конечных замкнутых систем* или *систем, находящихся в неизменных внешних условиях*. Примером может служить закрытое помещение на корабле, о котором говорил Галилей. Помещение должно быть закрыто. Иначе явления, в нем происходящие, зависели бы от скорости ветра, меняющейся с изменением скорости движения корабля. Такое помещение все же не является вполне замкнутой системой. Тела, в нем находящиеся, подвержены внешним влияниям: на них действует поле силы тяжести Земли. Однако это поле одно и то же, независимо от того, движется корабль равномерно или стоит на месте. Поэтому закрытое помещение с находящимися в нем телами ведет себя так же, как замкнутая система, хотя оно и находится во внешнем поле тяжести.

Принцип относительности иногда формулируют еще так: «Законы природы одинаковы во всех инерциальных системах отсчета». Недостаток этой формулировки состоит в том, что «одинаковость законов природы» может быть истолкована в смысле одинаковости протекания одного и того же явления во всех инерциальных системах отсчета. Это, как подробно разъяснено выше, неверно. Характер протекания физических явлений определяется не только основными законами природы, но и значениями параметров, определяющих начальные условия, в которых находилась система. Чтобы не возникало подобных неверных представлений, лучше говорить не просто о «законах природы», а по примеру Эйнштейна о «законах, по которым *происходят изменения состояний физических систем*», формулируя принцип относительности следующим образом:

*Законы природы, по которым изменяются состояния физических систем, не зависят от того, к какой из инерциальных систем отсчета относятся эти изменения.*

Эта формулировка является более общей, чем прежняя, в которой говорилось об инвариантности законов Ньютона относительно преобразования Галилея. Во-первых, здесь идет речь об инвариантности *всех физических законов,* а не только законов механики, каковыми являются законы Ньютона. Во-вторых, здесь не указан конкретный вид преобразований координат и времени, относительно которых законы природы инвариантны. Такие преобразования надо найти из *самого принципа относительности* и некоторых дополнительных соображений. Именно так в теории относительности получаются преобразования Лоренца, о которых было упомянуто выше. Законы природы инвариантны относительно преобразования Лоренца. Принцип относительности в такой формулировке называется *принципом относительности Эйнштейна.* О нем будет идти речь в последующих частях нашего курса.

## § 16. Аддитивность и закон сохранения массы

**1.** Пусть два тела с массами $m_1$ и $m_2$ сталкиваются между собой и соединяются в одно — составное — тело. Примером может служить слипание двух глиняных шаров при столкновении между собой. Другим примером является *химическая* или *ядерная реакция,* в которой два атома или ядра соединяются в молекулу или новое ядро. Требуется определить массу составного тела $m$, зная массы $m_1$ и $m_2$ соединяющихся тел. На первый взгляд ответ кажется тривиальным, а именно $m = m_1 + m_2$. Хотя это в какой-то мере и правильно, но требует обоснования. Обоснование можно дать на основе принципа относительности Галилея.

Рассмотрим процесс столкновения в какой-либо инерциальной системе отсчета $S$. Обозначим через $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ скорости тел до столкновения, а через $\boldsymbol{v}$ — скорость составного тела после столкновения. На основании закона сохранения импульса можно написать

$$m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 = m\boldsymbol{v}. \qquad (16.1)$$

Рассмотрим теперь тот же процесс в системе отсчета $S'$, движущейся относительно системы $S$ прямолинейно и равномерно со скоростью $\boldsymbol{V}$. Согласно принципа относительности закон сохранения ипульса справедлив также в системе $S'$ и записывается в виде

$$m_1\boldsymbol{v}_1' + m_2\boldsymbol{v}_2' = m\boldsymbol{v}'. \qquad (16.2)$$