ГЛАВА III

НЕКОТОРЫЕ СЛЕДСТВИЯ И ПРИМЕНЕНИЯ ЗАКОНОВ НЬЮТОНА

* *

§ 18. Импульс силы и изменение количества движения

1. Как было показано в § 12, производная количества движения $\boldsymbol{p}$ системы материальных точек по времени определяется уравнением

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}=\boldsymbol{F}^{(e)}, \tag{18.1}$$

где $\boldsymbol{F}^{(e)}$ — геометрическая сумма всех внешних сил, действующих на систему. Внутренние силы не входят в это уравнение из-за третьего закона Ньютона. В случае одной материальной точки уравнение (18.1) переходит в уравнение, выражающее второй закон Ньютона. Допустим, что сила $\boldsymbol{F}^{(e)}$ постоянна. Тогда из уравнения (18.1) следует

$$\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_0=\boldsymbol{F}^{(e)}(t-t_0), \tag{18.2}$$

где векторы $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{p}_0$ означают количества движения системы в моменты времени t и t_0 соответственно.

Произведение постоянной силы $\boldsymbol{F}^{(e)}$ на время ее действия называется *импульсом силы* за то же время. Это понятие нельзя смешивать с ранее введенной величиной $\boldsymbol{p}=m_1\boldsymbol{v}_1+\ldots+m_n\boldsymbol{v}_n$, которая называется *импульсом системы материальных точек* или *импульсом тела*. Недоразумений возникнуть не может, так как слово «импульс» отдельно нигде встречаться не будет. Оно будет входить в комбинации либо со словом «сила», либо со словом «тело» (или «материальная точка» и «система материальных точек»). Поэтому всякий раз будет ясно, о каком импульсе идет речь. Чтобы полностью застраховать себя от возможных недоразумений, величины $\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{p}=m_1\boldsymbol{v}_1+\ldots+m_n\boldsymbol{v}_n$ мы не будем называть импульсами во всех тех случаях, когда одновременно используется понятие импульса силы, а будем пользоваться для этих величин термином «*количество движения*». Впрочем, понятие импульса силы будет встречаться сравнительно редко.

2. Соотношение (18.2) означает, что приращение количества движения тела или системы тел равно импульсу геометрической суммы всех внешних сил, действующих на систему. Этот результат получен нами в предположении, что сила $\boldsymbol{F}^{(e)}$ постоянна. Он может быть обобщен и на тот случай, когда эта сила меняется во времени.

Разделим промежуток времени $t - t_0$ на более мелкие промежутки $(t_1 - t_0)$, $(t_2 - t_1)$, ..., $(t - t_{n-1})$ (рис. 31). Выберем эти промежутки настолько малыми, чтобы на каждом из них силу $\boldsymbol{F}^{(e)}$ без большой ошибки можно было считать приблизительно постоянной. Соответствующие значения силы $\boldsymbol{F}^{(e)}$ на таких промежутках обозначим $\boldsymbol{F}_1^{(e)}$, ..., $\boldsymbol{F}_n^{(e)}$. Тогда на основании соотношения (18.2) можно написать приближенно

$$\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_0 = \boldsymbol{F}_1^{(e)}(t_1 - t_0),$$
$$\boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{F}_2^{(e)}(t_2 - t_1),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_{n-1} = \boldsymbol{F}_n^{(e)}(t - t_{n-1}),$$

где $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$, ..., $\boldsymbol{p}_{n-1}$ — количества движения системы в моменты времени t_1, t_2, ..., t_{n-1} соответственно. Складывая эти равенства, получим

$$\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_0 = \sum_i \boldsymbol{F}_i^{(e)} \Delta t_i,$$

где использовано стандартное обозначение $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$. Последнее равенство является приближенным и не совсем определенным,

Рис. 31.

поскольку значения внешней силы $\boldsymbol{F}_1^{(e)}$ $\boldsymbol{F}_2^{(e)}$, ..., $\boldsymbol{F}_n^{(e)}$ не фиксированы точно. Однако эта неопределенность устраняется и указанное равенство переходит в точное соотношение, если перейти к пределу, устремляя к нулю наибольший из промежутков времени Δt_i при неизменной длине временного интервала $t - t_0$. В результате такого предельного перехода получится

$$\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_0 = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_i \boldsymbol{F}_i^{(e)} \Delta t_i.$$

Как известно, предел, стоящий в правой части этого равенства, называется определенным интегралом функции $\boldsymbol{F}^{(e)}(t)$ в пределах от t_0 до t и обозначается посредством

$$\int_{t_0}^{t} \boldsymbol{F}^{(e)}(\tau)\, d\tau \equiv \lim_{\Delta t_i \to 0} \sum_i \boldsymbol{F}_i^{(e)} \Delta t_i.$$

Аргумент функции $\boldsymbol{F}^{(e)}$, по которому производится интегрирование, обозначен посредством τ, чтобы не смешивать его с верхним пределом интеграла t. Величина τ называется *переменной интегри-*

рования. Значение определенного интеграла не зависит от того, какой буквой обозначена переменная интегрирования. При заданной подынтегральной функции оно определяется только значениями пределов интегрирования t_0 и t.

Таким образом, обобщением соотношения (18.2) является формула

$$\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_0=\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{F}^{(e)}(\tau)\,d\tau. \tag{18.3}$$

Интеграл, стоящий в правой части этого равенства, называется *импульсом силы* $\boldsymbol{F}^{(e)}$ *за время от* t_0 *до* t. Следовательно, и в случае силы, меняющейся во времени, *приращение количества движения системы материальных точек равно импульсу геометрической суммы всех действующих на нее внешних сил.* Внутренние силы, как уже подчеркивалось выше, не влияют на изменение полного количества движения системы, поскольку они всегда входят попарно и удовлетворяют принципу равенства действия и противодействия.

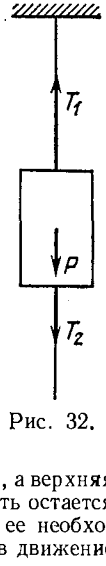

Рис. 32.

3. Количество движения, приобретаемое телом, зависит, таким образом, не только от величины силы, но и от продолжительности ее действия. Иллюстрацией этого может служить следующий простой опыт. Тяжелая гиря (рис. 32) подвешена на нити, снизу к ней прикреплена такая же нить. Если медленно тянуть за нижнюю нить, то рвется верхняя нить. Причина ясна. Так как гиря все время практически находится в покое, разность натяжений нити $T_1 - T_2$ должна уравновешивать вес груза P: $T_1 - T_2 = P$. Отсюда следует $T_1 > T_2$. Обозначим символом T_0 максимальное натяжение, которое может выдержать нить, не разрываясь. Когда мы медленно тянем за нижнюю нить, то в некоторый момент времени натяжение T_1 достигает предельной величины T_0. В этот момент натяжение нижней нити T_2 еще меньше T_0. Поэтому нижняя нить остается целой, а верхняя рвется. Однако, если быстро дернуть за нижнюю нить, то верхняя нить остается целой, а нижняя рвется. Дело в том, что для разрыва верхней нити ее необходимо растянуть на определенную длину. А для этого надо привести в движение гирю. Чтобы сообщить гире необходимое смещение, требуется конечное время, даже когда на нее действует большая сила. Быстро дергая за нижнюю нить, мы не успеваем сообщить гире достаточное смещение. В нижней нити возникает натяжение, превосходящее предельное T_0, в то время как верхняя нить еще не успеет растянуться, и ее натяжение практически остается неизменным. Поэтому и рвется нижняя нить.

Опишем второй опыт, иллюстрирующий влияние продолжительности действия силы. Из ватманской бумаги вырезаются два одинаковых кольца с наружным диаметром ~ 20 см и внутренним диаметром ~ 15 см. Кольца подвешиваются на двух горизонтальных металлических стержнях, зажатых в штативах. В кольца вставляется четырехугольная сосновая планка длиной ~ 1 м с поперечным сечением ~ 2—3 см^2. Расстояние между бумажными кольцами должно быть лишь немного меньше длины планки. Если плавно нажимать на середину планки, то одно из бумажных колец (или оба вместе) рвется, а планка остается целой. Нанесем теперь по середине планки резкий сильный удар тяжелой металлической палкой. Планка ломается, а кольца остаются целыми. Поразительным в этом опыте является не то, что ломается планка — она переломилась бы и при отсутствии колец, а то, что остаются целыми бумажные кольца.