центра масс меняется при переходе от одной системы отсчета к другой, движущейся относительно нее. Если частицы *точечные* и взаимодействуют только *в моменты столкновений*, то вся масса будет сосредоточена только *в частицах*, а не в полях. Показать прямым дифференцированием, что в этом случае скорость центра масс изолированной системы не меняется во времени и определяется формулой

$$\dot{R} = \sum m_i \dot{r}_i / \sum m_i = p / \sum m_i,$$

где p — импульс системы, а суммирование, как и в предыдущем выражении, производится по всем частицам, входящим в нее. Например, если равномерно движущееся радиоактивное ядро распадается на лету, то центр масс образовавшихся осколков будет продолжать в точности такое же равномерное движение, т. е. движение с прежней постоянной скоростью и в прежнем направлении.

§ 20. Приведенная масса

1. Рассмотрим замкнутую систему, состоящую из двух взаимодействующих материальных точек с массами m_1 и m_2 (рис. 35). Уравнения движения этих точек можно записать в виде

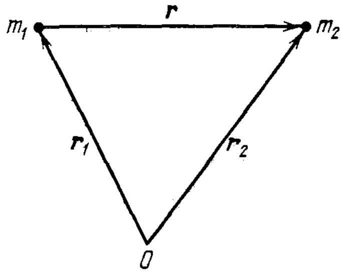

Рис. 35.

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}_1}{dt^2} = \frac{\boldsymbol{F}_1}{m_1}, \qquad \frac{d^2\boldsymbol{r}_2}{dt^2} = \frac{\boldsymbol{F}_2}{m_2}, \tag{20.1}$$

причем по третьему закону Ньютона $\boldsymbol{F}_1 = -\boldsymbol{F}_2$. Вычитая из одного уравнения другое, находим

$$\frac{d^2}{dt^2}(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) = \frac{\boldsymbol{F}_2}{m_2} - \frac{\boldsymbol{F}_1}{m_1} = \boldsymbol{F}_2\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right).$$

Это уравнение описывает движение одной материальной точки относительно другой, так как разность $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$ есть радиус-вектор, проведенный от первой точки ко второй. Он однозначно определяет положение второй точки относительно первой. Введем обозначение

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}, \quad \text{или} \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \tag{20.2}$$

Тогда предыдущее уравнение перейдет в

$$\mu \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{F}_2. \tag{20.3}$$

Это уравнение формально аналогично второму закону Ньютона. Роль силы играет сила $\boldsymbol{F}_2$, действующая на вторую материальную точку, а роль массы — вспомогательная величина μ, называемая *приведенной массой*.

Разумеется, одно уравнение (20.3) не может быть эквивалентно двум исходным уравнениям (20.1). Однако такая эквивалентность может быть достигнута, если к уравнению (20.3) присоединить уравнение, выражающее теорему о движении центра масс системы. Последняя в рассматриваемом случае сводится к утверждению, что центр масс системы движется прямолинейно и равномерно. Тем самым задача о движении двух материальных точек распадается на две независимые задачи: 1) определение равномерного движения центра масс; 2) определение относительного движения одной материальной точки относительно другой. Вторая задача формально сводится к задаче о движении одной материальной точки с массой μ в силовом поле другой точки. Этим и оправдывается введение понятия приведенной массы. Никакого глубокого физического смысла приведенная масса не имеет. На нее надо смотреть только как на целесообразное обозначение.

2. Рассмотрим пример, поясняющий пользу введения понятия приведенной массы. Пусть планета обращается вокруг Солнца по окружности радиуса r. Действующая на нее сила по закону всемирного тяготения равна $F = G\frac{Mm}{r^2}$, где M — масса Солнца, m — масса планеты, G — гравитационная постоянная. Так как сила направлена к Солнцу, то в векторной форме $\mathbf{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r} = -G\frac{Mm}{r^3}\mathbf{r}$. Вводя приведенную массу, запишем уравнение движения планеты относительно Солнца:

$$\mu\ddot{\mathbf{r}} \equiv \frac{Mm}{M+m}\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} = -G\frac{Mm}{r^3}\mathbf{r}.$$

Отсюда

$$\ddot{\mathbf{r}} = -G\frac{M+m}{r^3}\mathbf{r}.$$

Так как вращение планеты по орбите равномерное, то $\ddot{\mathbf{r}} = -\omega^2\mathbf{r}$, а потому

$$\omega^2 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = G\frac{M+m}{r^3},$$

где ω — угловая скорость, а T — период обращения планеты. Если масса планеты пренебрежимо мала по сравнению с массой Солнца, то для угловой скорости ω_1 и периода обращения T_1 получаем

$$\omega_1^2 = \left(\frac{2\pi}{T_1}\right)^2 = G\frac{M}{r^3}.$$

Если бы масса планеты была равна массе Солнца (двойная звезда), то для угловой скорости ω_2 и периода обращения мы получили бы

$$\omega_2^2 = \left(\frac{2\pi}{T_2}\right)^2 = G\frac{2M}{r^3}.$$

При одном и том же расстоянии r

$$\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = 2.$$

Период обращения во втором случае меньше, чем в первом, в $\sqrt{2}$ раз.