## § 21. Движение тел с переменной массой. Реактивное движение

**1.** Термин *«переменная масса»* употребляется в этом параграфе в совершенно ином смысле, чем в теории относительности. В теории относительности масса движущегося тела изменяется за счет изменения его скорости, причем никакого вещества во время движения тело не получает и не теряет. Напротив, в настоящем параграфе говорится о медленном движении тел, масса которых меняется за счет *потери* или *приобретения вещества*. Например, масса автомобиля для поливки улиц уменьшается за счет вытекающих водяных струй; дождевая капля растет при падении в воздухе, пересыщенном водяными парами; масса ракеты или реактивного самолета уменьшается за счет истечения газов, образующихся при сгорании топлива. В таких случаях говорят о движении тел с переменной массой. Уравнения движения тел с переменной массой не содержат ничего принципиально нового по сравнению с законами Ньютона, а являются их следствиями. Тем не менее они представляют большой интерес, главным образом в связи с ракетной техникой.

**2.** Выведем уравнение движения материальной точки с переменной массой на примере движения ракеты. Принцип действия ракеты очень прост. Ракета с большой скоростью выбрасывает вещество (газы), воздействуя на него с большой силой. Выбрасываемое вещество с той же, но противоположно направленной силой в свою очередь действует на ракету и сообщает ей ускорение в противоположном направлении. Если нет внешних сил, то ракета вместе с выброшенным веществом является замкнутой системой. Импульс такой системы не может меняться во времени. На этом положении и основана теория движения ракет. Целесообразно, однако, обобщить задачу, предположив, что на ракету действуют внешние силы. Такими силами могут быть сила земной тяжести, гравитационное притяжение Солнца и планет, а также сила сопротивления среды, в которой движется ракета.

Пусть $m(t)$ — масса ракеты в произвольный момент времени $t$, а $\boldsymbol{v}(t)$ — ее скорость в тот же момент. Количество движения ракеты в этот момент времени будет $m\boldsymbol{v}$. Спустя время $dt$ масса и скорость ракеты получат приращения $dm$ и $d\boldsymbol{v}$ (величина $dm$ отрицательна!). Количество движения ракеты станет равным $(m+dm)(\boldsymbol{v}+d\boldsymbol{v})$. Сюда надо добавить количество движения газов, образовавшихся за время $dt$. Оно равно $dm_{\text{газ}}\boldsymbol{v}_{\text{газ}}$, где $dm_{\text{газ}}$ — масса газов, образовавшихся за время $dt$, а $\boldsymbol{v}_{\text{газ}}$ — их скорость. Вычитая из суммарного количества движения в момент $t+dt$ количество движения системы в момент $t$, найдем приращение этой величины за время $dt$. Согласно известной теореме это приращение равно $\boldsymbol{F}dt$, где $\boldsymbol{F}$ — геометрическая сумма всех внешних сил, действующих на ракету. Таким образом,

$$(m+dm)(\boldsymbol{v}+d\boldsymbol{v})+dm_{\text{газ}}\boldsymbol{v}_{\text{газ}}-m\boldsymbol{v}=\boldsymbol{F}\,dt.$$

Время $dt$, а с ним и приращения $dm$ и $d\boldsymbol{v}$ мы должны устремить к нулю — нас интересуют предельные отношения, или производные $\frac{dm}{dt}$ и $\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$. Поэтому, раскрывая скобки, можно отбросить произведение $dm \cdot d\boldsymbol{v}$, как бесконечно малую высшего порядка. Далее, ввиду сохранения массы, $dm + dm_{\text{газ}} = 0$. Пользуясь этим, можно исключить массу газов $dm_{\text{газ}}$. Наконец, разность $\boldsymbol{v}_{\text{отн}} = \boldsymbol{v}_{\text{газ}} - \boldsymbol{v}$ есть скорость истечения газов относительно ракеты. Мы будем называть ее *скоростью газовой струи.* С учетом этих замечаний предыдущее соотношение легко преобразуется к виду

$$m\,d\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{\text{отн}}\,dm + \boldsymbol{F}dt. \tag{21.1}$$

Отсюда делением на $dt$ получаем

$$m\,\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{v}_{\text{отн}}\,\frac{dm}{dt} + \boldsymbol{F}. \tag{21.2}$$

По форме уравнение (21.2) совпадает с уравнением, выражающим второй закон Ньютона. Однако масса тела $m$ здесь не постоянна, а меняется во времени из-за потери вещества. К внешней силе $\boldsymbol{F}$ добавляется дополнительный член $\boldsymbol{v}_{\text{отн}}\frac{dm}{dt}$, который может быть истолкован как *реактивная сила,* т. е. сила, с которой действуют на ракету вытекающие из нее газы. Уравнение (21.2) впервые было получено русским механиком И. В. Мещерским (1859—1935). Оно, так же как и эквивалентное ему уравнение (21.1), называется *уравнением Мещерского* или *уравнением движения точки с переменной массой.*

**3.** Применим уравнение (21.1) к движению ракеты, на которую не действуют никакие внешние силы. Полагая $\boldsymbol{F} = 0$, получим

$$m\,d\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{\text{отн}}\,dm.$$

Допустим, что ракета движется прямолинейно в направлении, противоположном скорости газовой струи $\boldsymbol{v}_{\text{отн}}$. Если направление полета принять за положительное, то проекция вектора $\boldsymbol{v}_{\text{отн}}$ на это направление будет отрицательной и равной $-v_{\text{отн}}$. Поэтому в скалярной форме предыдущее уравнение можно записать так: $m\,dv = -v_{\text{отн}}\,dm$, причем в соответствии с принятыми обозначениями величина $v_{\text{отн}}$ существенно положительна. Следовательно,

$$\frac{dv}{dm} = -\frac{v_{\text{отн}}}{m}. \tag{21.3}$$

Скорость газовой струи $v_{\text{отн}}$ может меняться во время полета. Однако простейшим и наиболее важным является случай, когда она постоянна. Предположение о постоянстве $v_{\text{отн}}$, очевидно, не затрагивает основные черты явления, но сильно облегчает решение уравнения (21.3). В этом случае

$$v = -v_{\text{отн}} \int \frac{dm}{m} = -v_{\text{отн}} \ln m + C.$$

Значение постоянной интегрирования $C$ определяется начальными условиями. Допустим, что в начальный момент времени скорость ракеты равна нулю, а ее масса равна $m_0$. Тогда предыдущее уравнение дает $0 = -v_{\text{отн}} \ln m_0 + C$, откуда $C = v_{\text{отн}} \ln m_0$. Следовательно,

$$v = v_{\text{отн}} \ln \frac{m_0}{m}, \tag{21.4}$$

или

$$\frac{m_0}{m} = e^{\frac{v}{v_{\text{отн}}}}. \tag{21.5}$$

Последнее соотношение называется *формулой Циолковского* (1857—1935). Она получена нами для нерелятивистских движений, т. е. для тех случаев, когда обе скорости $v$ и $v_{\text{отн}}$ малы по сравнению со скоростью света в вакууме $c$. Но ее можно обобщить на случай релятивистских движений. Если $m_0$ и $m$ означают массы покоя ракеты в соответствующие моменты времени, то без вычислений ясно, что формула (21.5) дает заниженное значение для отношения $m_0/m$. Действительно, релятивистская масса возрастает со скоростью. Ввиду этого при одном и том же расходе топлива «релятивистская» ракета достигнет меньшей скорости, чем получается по нерелятивистской формуле (21.5). Релятивистская формула имеет вид

$$\frac{m_0}{m} = \left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)^{\frac{c}{2v_{\text{отн}}}} \tag{21.6}$$

(см. задачу 2 к § 22). Здесь $\beta \equiv \frac{v}{c}$. При $\beta \ll 1$ и $\frac{v_{\text{отн}}}{c} \ll 1$ формула (21.6) переходит в формулу Циолковского. Действительно, в этом случае

$$\frac{1+\beta}{1-\beta} \approx 1 + 2\beta$$

и, следовательно,

$$\frac{m_0}{m} \approx (1+2\beta)^{\frac{c}{2v}\,\frac{v}{v_{\text{отн}}}} = (1+2\beta)^{\frac{1}{2\beta}\,\frac{v}{v_{\text{отн}}}}.$$

Так как величина $2\beta$ мала, то

$$(1+2\beta)^{1/(2\beta)} \approx \lim_{\beta \to 0} (1+2\beta)^{1/(2\beta)} = e.$$

В результате в предельном случае медленных движений получаем

$$\frac{m_0}{m} = e^{v/v_{\text{отн}}},$$

т. е. формулу Циолковского.

4. Формула Циолковского позволяет рассчитать запас топлива, необходимый для сообщения ракете определенной скорости $v$. В табл. 1 приведены отношения начальной массы ракеты $m_0$ к ее конечной массе $m$ при различных значениях отношения $v/v_{\text{отн}}$. Вычисления выполнены с помощью нерелятивистской формулы (21.5).

Таблица 1

| $v/v_{\text{отн}}$ | $m_0/m$ | $v/v_{\text{отн}}$ | $m_0/m$ | $v/v_{\text{отн}}$ | $m_0/m$ | $v/v_{\text{отн}}$ | $m_0/m$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2,72 | 4 | 54,6 | 7 | 1100 | 10 | 22000 |
| 2 | 7,39 | 5 | 148 | 8 | 2980 | 11 | 59900 |
| 3 | 20,1 | 6 | 403 | 9 | 8100 | 12 | 163000 |

Допустим, например, что ракете надо сообщить *первую космическую скорость*, т. е. такую скорость, чтобы она начала двигаться вокруг Земли по окружности. Эта скорость приблизительно равна $v = 8$ км/с. При скорости газовой струи $v_{\text{отн}} = 1$ км/с должно быть $m_0/m = 2980$. Практически вся масса ракеты приходится на топливо. При $v_{\text{отн}} = 2$ км/с получилось бы $m_0/m = 54,6$, при $v_{\text{отн}} = 4$ км/с $m_0/m = 7,39$ и т. д. Отсюда видно, что относительная полезная масса ракеты очень быстро увеличивается с увеличением скорости газовой струи $v_{\text{отн}}$. Газы, выходящие из ракеты, должны иметь возможно меньший молекулярный вес и быть нагреты до возможно более высокой температуры. Действительно, в молекулярной физике будет показано, что скорость газовой струи $v_{\text{отн}}$ пропорциональна $\sqrt{T/\mu}$, где $T$ — абсолютная температура газа, а $\mu$ — его молекулярный вес.

В современных ракетах на химическом топливе скорость газовой струи порядка одного или нескольких километров в секунду. Вероятно, она не превосходит 4 км/с. Имея это в виду, оценим перспективы межпланетных и межзвездных полетов ракет на химическом топливе. Минимальная скорость, которую необходимо сообщить ракете относительно Земли, чтобы она вышла за пределы действия поля земного тяготения, называется *второй космической скоростью* и составляет 11,2 км/с. Практически такую скорость необходимо сообщить ракете, например, при отправке ее на Луну. Скорость ракеты, которую она должна приобрести относительно Земли, чтобы навсегда покинуть пределы Солнечной системы, называется *третьей космической скоростью*. Третья космическая скорость зависит от направления начальной скорости ракеты. Минимальное ее значение соответствует запуску ракеты по касательной к земной орбите в направлении орбитального вращения Земли. Эта скорость составляет около 16,7 км/с (см. § 61). Скорости такого порядка необходимы при межпланетных путешествиях. Допустим, что $v_{\text{отн}} = 4$ км/с. Тогда для достижения второй космической скорости отношение $m_0/m$ должно составлять $m_0/m = e^{11,2/4} \approx 17$, а для достижения третьей $m_0/m = e^{16,7/4} \approx 64$. Оба отношения не очень велики. Однако надо принять во внимание, что ракета должна иметь запас топлива для обратного возвращения на Землю, а также для ее торможения при посадке и для коррекции траектории. Поэтому отношение $m_0/m$ ($m$ — масса ракеты, вернувшейся обратно на Землю) должно быть значительно больше. Допустим, например, что поле тяготения и размеры второй планеты такие же, как у Земли. Тогда при путешествии в прямом направлении в нашем примере должно быть $m_0/m' \approx 60$ ($m'$ — масса ракеты, достигшей второй планеты). При обратном путешествии $m'/m \approx 60$, так что $m_0/m \approx 3600$. Таким образом, для осуществления межпланетных полетов запас топлива должен превышать массу космического корабля по меньшей мере в несколько тысяч раз. Технические трудности очень велики, но, по-видимому, все еще преодолимы.

Но для межзвездных полетов ракеты на химическом топливе абсолютно непригодны. Возьмем, например, $v_{\text{отн}} = 10$ км/с, что для ракет на химическом топливе, по-видимому, завышает пределы возможного. (Если допустить, что газовая струя состоит из наиболее легкого вещества — атомарного водорода, то для достижения таких скоростей потребуются температуры порядка 5000 °С). Расстояния до звезд измеряются *световыми годами* — от ближайшей звезды свет идет до Земли около 4 лет. Поэтому для достижения даже ближайших звезд нужны космические корабли, скорости которых близки к скорости света $c$. В табл. 2 приведены значения отношения $m_0/m$ при различных значениях $\beta$, вычисленные по релятивистской формуле (21.6) и по формуле Циолковского (21.5) в предположении, что $v_{\text{отн}} = 10$ км/с. Таблица, между прочим, наглядно показывает, когда существенны релятивистские эффекты и формула Циолковского не применима.

Таблица 2

| $\beta = \frac{v}{c}$ | $m_0/m$ | |
|---|---|---|
| | по формуле (21.6) | по формуле (21.5) |
| 0,001 | $1{,}0690 \cdot 10^{13}$ | $1{,}0686 \cdot 10^{13}$ |
| 0,01 | $1{,}963 \cdot 10^{130}$ | $1{,}942 \cdot 10^{130}$ |
| 0,1 | $1{,}79 \cdot 10^{1307}$ | $7{,}64 \cdot 10^{1302}$ |
| 0,25 | $5{,}37 \cdot 10^{3327}$ | $1{,}62 \cdot 10^{3257}$ |
| $\frac{1}{3}$ | $2{,}84 \cdot 10^{4515}$ | $8{,}81 \cdot 10^{4342}$ |

Допустим, что скорость космического корабля $v$ должна составлять четверть скорости света ($\beta = 0{,}25$). Тогда должно быть $m_0/m \approx 5 \cdot 10^{3327}$. На каждую тонну полезного груза должно приходиться $5 \cdot 10^{3327}$ тонн топлива! Если полезная масса $m = 20$ т $= 2 \cdot 10^7$ г, то стартовая масса корабля должна быть $m_0 \approx 10^{3329}$ т $= 10^{3335}$ г! Обычно, когда имеют дело с очень большими величинами, их называют «*астрономическими*». В данном случае такое сравнение не годится — речь идет о величинах несравненно большего масштаба. Для сравнения приведем массы некоторых частиц и астрономических объектов:

| | |
|---|---|
| Масса электрона | $9{,}11 \cdot 10^{-28}$ г |
| Масса протона | $1{,}67 \cdot 10^{-24}$ г |
| Масса Земли | $5{,}98 \cdot 10^{27}$ г |
| Масса Солнца | $1{,}99 \cdot 10^{33}$ г |
| Масса Галактики | $3 \cdot 10^{44}$ г |
| Масса Метагалактики | $10^{56}$ г. |

Под *Метагалактикой* понимают ту часть *Вселенной*, которая доступна исследованиям с помощью современных наиболее мощных телескопов. Масса Метагалактики превосходит массу электрона примерно в $10^{83}$ раза. Масса нашего фантастического корабля с топливом должна превосходить массу Метагалактики в $10^{3329}$ раз! Эти цифры превосходят всякое воображение. В масштабах нашего космического корабля Метагалактика выглядит несравненно более малым объектом, чем электрон в масштабах Метагалактики.

Вряд ли имеет смысл говорить о движении столь фантастически гигантского космического корабля относительно Метагалактики, имеющей по сравнению с ним ничтожные размеры. Вводить в рассмотрение объекты таких размеров и применять к ним обычные законы физики является недопустимой экстраполяцией. Наш пример доказывает только, что для межзвездных полетов ракеты на химическом топливе абсолютно непригодны.

Было бы неосторожным на основании изложенного сделать вывод, что звездные миры никогда не будут доступны земным космонавтам. Только отдаленное будущее покажет, возможно это или нет. Не собираясь входить в обсуждение этой фантастической проблемы, ограничимся следующими замечаниями. Для превращения ракеты в *звездолет* прежде всего необходимо повысить скорость струи $v_{\text{отн}}$, приблизив ее к скорости света. Идеальным был бы случай $v_{\text{отн}} = c$. Так было бы в *фотонной ракете,* в которой роль газовой струи должен играть световой пучок, излучаемый двигателем корабля в определенном направлении. Реактивная сила в фотонной ракете осуществлялась бы давлением света, оказываемым на корабль при излучении светового пучка. Превращение вещества в излучение постоянно происходит внутри звезд. Этот процесс осуществляется и на Земле и притом не только в лабораторных условиях, а в более крупном масштабе (взрывы атомных и водородных бомб). Возможно ли придать ему управляемый характер и использовать в фотонных ракетах — на этот вопрос отвечать преждевременно.

## ЗАДАЧИ

1. Для лучшего уяснения закономерностей движения ракеты полезно рассмотреть мысленный случай, когда ракета выбрасывает вещество не непрерывно, а конечными дискретными порциями одной и той же массы $\Delta m$. Пусть при каждом выбрасывании порция вещества $\Delta m$ получает одну и ту же скорость $v_{\text{отн}}$ относительно ракеты, направленную назад. Определить скорость ракеты $v_N$, которую она достигнет после $N$ выбрасываний, если начальная масса ракеты равна $m_0$. Показать, что в предельном случае, когда $\Delta m \to 0$, $N \to \infty$, но произведение $N\Delta m$ остается постоянным, выражение для $v_N$ переходит в формулу Циолковского. Ограничиться нерелятивистскими скоростями.

Решение. Пусть $v_1, v_2, \ldots$ — скорости ракеты после 1-го, 2-го, ... выбрасываний. По закону сохранения импульса $(m_0 - \Delta m)\, v_1 + \Delta m \cdot w = 0$, где $w$ — скорость выброшенной массы $\Delta m$ после первого выбрасывания. Очевидно $v_{\text{отн}} = v_1 - w$. Исключая $w$, получим

$$v_1 = \frac{\Delta m}{m_0} v_{\text{отн}}. \tag{21.7}$$

Найдем теперь $v_2$. В системе отсчета, движущейся со скоростью $v_1$, ракета перед вторым выбрасыванием неподвижна, а после второго выбрасывания приобретает скорость $v_2 - v_1$. Поэтому можно воспользоваться формулой (21.7), сделав в ней замену $m_0 \to m_0 - \Delta m$, $v_1 \to v_2 - v_1$. Это дает

$$v_2 - v_1 = \frac{\Delta m}{m_0 - \Delta m} v_{\text{отн}}.$$

Комбинируя это соотношение с (21.7), находим $v_2$. Продолжая этот процесс дальше, нетрудно получить

$$v_N = \left[\frac{\Delta m}{m_0} + \frac{\Delta m}{m_0 - \Delta m} + \ldots + \frac{\Delta m}{m_0 - (N-1)\Delta m}\right] v_{\text{отн}}.$$

В пределе, когда $\Delta m \to 0$, $N \to \infty$, $m_0 - (N-1)\Delta m \to m$, сумма, стоящая в квадратных скобках, переходит в интеграл, и мы получаем

$$v = v_{\text{отн}} \int\limits_{m}^{m_0} \frac{dm'}{m'},$$

где $m$ — конечная масса ракеты. После взятия интеграла получается формула Циолковского (21.5).

**2.** Найти связь между массой ракеты $m(t)$, достигнутой ею скоростью $v(t)$ и временем $t$, если ракета движется вертикально вверх в поле земной тяжести. Скорость газовой струи относительно ракеты $v_{отн}$ считать постоянной. Сопротивление воздуха и изменение ускорения силы тяжести $g$ с высотой не учитывать. Какую массу газов $\mu(t)$ должна ежесекундно выбрасывать ракета, чтобы оставаться неподвижной в поле тяжести.

Решение. Уравнение движения ракеты

$$m\frac{dv}{dt}=-v_{отн}\frac{dm}{dt}-mg$$

перепишем в форме

$$m\frac{d}{dt}(v+gt)=-v_{отн}\frac{dm}{dt}$$

или

$$\frac{d(v+gt)}{dm}=-\frac{v_{отн}}{m}.$$

Это уравнение имеет такой же вид, что и (21.3), если за неизвестное принять величину $v+gt$. Поэтому можно воспользоваться формулой (21.5), заменив в ней $v$ на $v+gt$. Это дает

$$\frac{m_0}{m}=e^{\frac{v+gt}{v_{отн}}},\quad v=v_{отн}\ln\frac{m_0}{m}-gt.$$

Величина $\mu$, очевидно, равна $-\frac{dm}{dt}$. Она находится из условия, что для неподвижной ракеты $\frac{dv}{dt}=0$, и равна

$$\mu=-\frac{dm}{dt}=\frac{m_0g}{v_{отн}}e^{-gt/v_{отн}}.$$

**3.** Космический корабль движется с постоянной по величине скоростью $v$. Для изменения направления его полета включается двигатель, выбрасывающий струю газа со скоростью $v_{отн}$ относительно корабля в направлении, перпендикулярном к его траектории. Определить угол $\alpha$, на который повернется вектор скорости корабля, если начальная масса его $m_0$, а конечная $m$.

Решение. Ускорение корабля по абсолютной величине равно $\omega^2 r=\omega v$, причем $v=\text{const}$. Поэтому уравнение движения

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\boldsymbol{v}_{отн}\frac{dm}{dt}$$

переходит в $mv\omega dt=-v_{отн}dm$. Замечая, что $d\alpha=\omega dt$ есть угол поворота за время $dt$, и интегрируя, получим

$$\alpha=\frac{v_{отн}}{v}\ln\frac{m_0}{m}.$$

**4.** Космический корабль, движущийся в пространстве, свободном от поля тяготения, должен изменить направление своего движения на противоположное, сохранив скорость по величине. Для этого предлагаются два способа: 1) сначала затормозить корабль, а затем разогнать его до прежней скорости; 2) повернуть, заставив корабль двигаться по дуге окружности, сообщая ему ускорение в поперечном направлении. В каком из этих двух способов потребуется меньшая затрата топлива? Скорость истечения газов относительно корабля считать постоянной и одинаковой в обоих случаях.

Ответ. Первый способ требует меньшей затраты топлива.

5. Определить коэффициент полезного действия ракеты, т. е. отношение кинетической энергии $K$, приобретенной ракетой, к количеству тепла $Q$, выделившемуся при сгорании топлива. Скорость, достигнутая ракетой, $v = 9$ км/с. Теплота сгорания топлива $q = 4000$ ккал/кг, скорость выбрасываемых продуктов сгорания относительно ракеты $u = 3$ км/с.

Ответ. $\dfrac{K}{Q} = \dfrac{v^2}{2q\left(e^{v/u}-1\right)} \approx 13\%$.

6. В ракете продукты сгорания (газы) выбрасываются со скоростью $u = 3$ км/с (относительно ракеты). Найти отношение ее кинетической энергии $K_{\text{рак}}$ к кинетической энергии продуктов сгорания $K_{\text{газ}}$ в момент достижения ракетой скорости $v_{\text{кон}} = 12$ км/с.

Решение. Приращение скорости ракеты $\boldsymbol{v}$ связано с изменением ее массы $m$ соотношением $m\,d\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{\text{отн}}\,dm$. Переходя к скалярной форме и новым обозначениям, запишем его в виде $m\,dv = -u\,dm$, причем $dm = -dm_{\text{газ}}$, где $m_{\text{газ}}$ — масса выброшенных газов. Приращение кинетической энергии газов

$$dK_{\text{газ}} = -\frac{1}{2}\,dm v_{\text{газ}}^2 = \frac{m v_{\text{газ}}^2}{2u}\,dv.$$

Подставив сюда $v_{\text{газ}} = v - u$ и воспользовавшись формулой Циолковского (21.5), получим

$$dK_{\text{газ}} = -\frac{m_0}{2u}\,(u-v)^2\,e^{-v/u}\,dv,$$

или после интегрирования

$$K_{\text{газ}} = \frac{m_0 u^2}{2}\left(1 - e^{-x} - x^2 e^{-x}\right),$$

где для краткости введено обозначение $x = v_{\text{кон}}/u$. Кинетическая энергия ракеты

$$K_{\text{рак}} = {}^1/_2 m v_{\text{кон}}^2 = {}^1/_2 m_0 u^2 x^2 e^{-x}.$$

В результате находим

$$\eta \equiv \frac{K_{\text{рак}}}{K_{\text{газ}}} = \frac{x^2}{e^x - (1+x^2)}.$$

При $x = 4$ $\eta = 45\%$.

7. С поверхности Луны стартует двухступенчатая ракета. При каком отношении масс первой ($m_1$) и второй ($m_2$) ступеней скорость контейнера с полезным грузом (массы $m$) получится максимальной? Скорость истечения газов $u$ в двигателях обеих ступеней постоянна и одинакова. Отношения массы топлива к массе ступени равны соответственно $\alpha_1$ и $\alpha_2$ для первой и второй ступеней. Отделение ступеней и контейнера производится без сообщения добавочных импульсов.

Решение. От действия силы тяжести Луны можно отвлечься. Сила тяжести уменьшает кинетическую энергию системы, но не влияет на условие максимума. Примем за единицу массы полную массу ракеты в момент старта. Тогда

$$m_1 + m_2 + m = 1. \tag{21.8}$$

После выгорания топлива в первой ступени масса системы уменьшится на $\alpha_1 m_1$.

Если при этом будет достигнута скорость $v_1$, то по соотношению Циолковского

$$e^{v_1/u} = \frac{1}{(1-\alpha_1) m_1 + m_2 + m}.$$

Масса $(1-\alpha_1) m_1$ отделяется, и включается двигатель второй ступени. После выгорания топлива во второй ступени скорость ракеты возрастает еще на величину $v_2$, причем

$$e^{v_2/u} = \frac{m_2 + m}{(1-\alpha_2) m_2 + m}.$$

В этом можно убедиться, если перейти в систему отсчета, в которой ракета в момент отделения первой ступени покоится. Полная достигнутая скорость найдется перемножением двух предыдущих соотношений и последующим логарифмированием. Исключая еще при этом массу $m_2$ с помощью соотношения (21.8), получим

$$\frac{v}{u} = \ln(1-m_1) - \ln(1-\alpha_1 m_1) - \ln[(1-\alpha_2)(1-m_1) + \alpha_2 m].$$

Здесь $m$ и $u$ играют роль постоянных параметров, а $m_1$ — аргумента, от которого зависит скорость $v$. Дифференцируя по $m_1$ и приравнивая производную нулю, получим условие максимума

$$\frac{1}{m_1 - 1} + \frac{1}{\beta - m_1} + \frac{1}{\gamma - m} = 0, \tag{21.9}$$

где введены обозначения

$$\beta = \frac{1}{\alpha_1}, \quad \gamma = 1 + \frac{\alpha_2}{1-\alpha_2} m.$$

Условие (21.9) приводит к квадратному уравнению относительно $m_1$, решая которое, найдем

$$m_1 = 1 - \sqrt{1 + (\beta\gamma - \beta - \gamma)}.$$

Перед корнем взят минус, так как по смыслу задачи $0 < m_1 < 1$. С помощью (21.8) находим массу $m_2$, а затем искомое отношение $m_2/m_1$. Возвращаясь при этом к прежним параметрам $\alpha_1$ и $\alpha_2$, получим

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{\sqrt{\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}\dfrac{1-\alpha_1}{1-\alpha_2}} - \sqrt{m}}{1 - \sqrt{\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}\dfrac{1-\alpha_1}{1-\alpha_2} m}} \sqrt{m}. \tag{21.10}$$

Решение имеет смысл при выполнении условия

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\frac{1-\alpha_1}{1-\alpha_2} m < 1.$$

В реальных условиях, когда $m \ll 1$, а параметры $\alpha_1$ и $\alpha_2$ отличаются не очень сильно, это условие соблюдается. При $\alpha_1 = \alpha_2$ получается простая формула

$$\frac{m_2}{m_1} = \sqrt{m}. \tag{21.11}$$