ГЛАВА IV

РАБОТА И ЭНЕРГИЯ

* *

§ 22. Работа и кинетическая энергия

1. *Работой силы* $\boldsymbol{F}$ *на перемещении* $d\boldsymbol{s}$ называется проекция F_s этой силы на направление перемещения, умноженная на величину самого перемещения:

$$dA = F_s\,ds = F\,ds\cos\alpha, \tag{22.1}$$

где α — угол между векторами $\boldsymbol{F}$ и $d\boldsymbol{s}$ (рис. 36). Поскольку перемещение ds предполагается бесконечно малым, величина dA называется также *элементарной работой* в отличие от *работы на конечном перемещении*. Если воспользоваться понятием скалярного произведения, то можно сказать, что *элементарная работа* dA есть скалярное произведение силы $\boldsymbol{F}$ на перемещение $d\boldsymbol{s}$:

$$dA = (\boldsymbol{F}\,d\boldsymbol{s}). \tag{22.2}$$

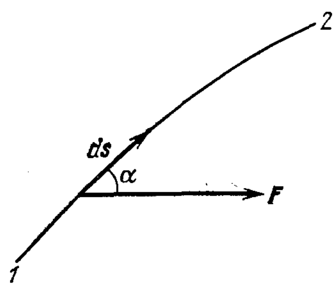

Рис. 36.

В общем случае, когда материальная точка, двигаясь по криволинейной траектории, проходит путь конечной длины, можно мысленно разбить этот путь на бесконечно малые элементы, на каждом из которых сила $\boldsymbol{F}$ может считаться постоянной, а элементарная работа может быть вычислена по формуле (22.1) или (22.2). Если сложить все эти элементарные работы и перейти к пределу, устремив к нулю длины всех элементарных перемещений, а число их — к бесконечности, то такой предел обозначается символом

$$A = \int_L (\boldsymbol{F}\,d\boldsymbol{s}) \tag{22.3}$$

и называется *криволинейным интегралом* вектора $\boldsymbol{F}$ вдоль траектории L. Этот интеграл, по определению, и дает *работу силы* $\boldsymbol{F}$ *вдоль кривой* L.

Если $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2$, то проектируя это векторное уравнение на направление элементарного перемещения $d\boldsymbol{s}$, получим $F_s = F_{1s} + F_{2s}$, а после умножения на ds: $F_s ds = F_{1s} ds + F_{2s} ds$, или

$$dA = dA_1 + dA_2. \tag{22.4}$$

Таким образом, *элементарная работа результирующей двух или нескольких сил равна сумме элементарных работ этих сил*. Очевидно, то же утверждение справедливо и для работ на конечных перемещениях:

$$A = A_1 + A_2. \tag{22.5}$$

Единицей работы в системе СИ является джоуль (Дж). *Джоуль* есть работа силы в один ньютон на перемещении в один метр при условии, что направление силы совпадает с направлением перемещения. В системе СГС единицей работы является эрг. *Эрг* есть работа силы в одну дину на перемещении в один сантиметр при том же условии, т. е. в предположении, что направления силы и перемещения совпадают. Очевидно,

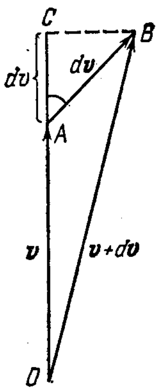

Рис. 37.

$$1 \text{ Дж} = 10^7 \text{ эрг}.$$

Работа, отнесенная к единице времени, т. е. величина

$$P = \frac{dA}{dt}, \tag{22.6}$$

называется *мощностью*. Ее единицами являются эрг на секунду и джоуль на секунду, или ватт (Вт). Очевидно,

$$1 \text{ Вт} = 10^7 \text{ эрг/с}.$$

Подставив в формулу (22.3) $\boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt}$, $d\boldsymbol{s} = \boldsymbol{v}\,dt$, придадим этой формуле вид

$$A = \int (\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{p}). \tag{22.7}$$

2. Чтобы вычислить интеграл, надо знать связь между скоростью материальной точки $\boldsymbol{v}$ и ее импульсом $\boldsymbol{p}$. По определению импульса $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$, причем в нерелятивистской механике масса m не зависит от скорости, так что $\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{v}$. Здесь вектор $d\boldsymbol{v}$ означает элементарное приращение вектора $\boldsymbol{v}$, причем это приращение может и не совпадать по направлению с вектором $\boldsymbol{v}$ (рис. 37). Если мы условимся понимать под v длину вектора $\boldsymbol{v}$, то очевидно $v^2 = \boldsymbol{v}^2$. Действительно, справа стоит скалярное произведение вектора $\boldsymbol{v}$ на самого себя, а оно равно квадрату длины вектора, как это непосредственно следует из определения скалярного произведения. Дифференцируя теперь обе части соотношения $v^2 = \boldsymbol{v}^2$, получим $v\,dv = \boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{v}$. Здесь dv есть элементарное приращение длины вектора $\boldsymbol{v}$. Его нельзя смешивать с длиной элементарного приращения вектора, т. е. с величиной $|d\boldsymbol{v}|$. Последняя величина по самому ее смыслу существенно положительна, в то время как приращение dv может быть как положительным, так и отрицательным. На рис. 37 $d\boldsymbol{v} = \overrightarrow{AB}$, $dv = AC$. По определению скалярного произведения $\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{v} = v \cdot AB \cos\alpha = v \cdot AC = v\,dv$. Это дает другое доказательство соотношения $\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{v} = v\,dv$. Разумеется, такое соотношение справедливо не только для вектора $\boldsymbol{v}$, но и для любого другого вектора. Используя его в нашей задаче и вынося постоянный множитель m из-под знака интеграла, получим

$$A_{12} = m \int_{v_1}^{v_2} v\,dv = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2},$$

где v_1 — начальная, а v_2 — конечная скорости точки. Букву A мы снабдили индексами 1, 2, чтобы подчеркнуть, что речь идет о работе при перемещении материальной точки из начального положения *1* в конечное положение *2* (см. рис. 36). Величина

$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m} \tag{22.8}$$

называется *кинетической энергией материальной точки*. С помощью этого понятия полученный результат запишется в виде

$$A_{12} = K_2 - K_1. \tag{22.9}$$

Таким образом, *работа силы при перемещении материальной точки равна приращению кинетической энергии этой точки*. Связь между работой и кинетической энергией, выражаемая этой теоремой, и оправдывает введение обоих этих понятий.

3. Полученный результат без труда обобщается на случай произвольной системы материальных точек. *Кинетической энергией системы* называется сумма кинетических энергий материальных точек, из которых эта система состоит или на которые ее можно мысленно разделить. Напишем соотношение (22.9) для каждой материальной точки системы, а затем все такие соотношения сложим. В результате снова получится формула (22.9), но уже не для одной материальной точки, а для системы материальных точек. Под A_{12} надо понимать сумму работ всех сил, как внутренних, так и внешних, действующих на материальные точки системы. Таким образом, *работа всех сил, действующих на систему материальных точек, равна приращению кинетической энергии этой системы*.

Имеется существенное отличие этой теоремы от аналогичной, в которой говорится о связи между импульсом силы и изменением количества движения системы (§ 18). Внутренние силы вследствие равенства действия и противодействия не меняют количества движения всей системы. Приращение количества движения системы определяется только *внешними силами*. Не так обстоит дело в случае кинетической энергии. Работа внутренних сил, вообще говоря, не обращается в нуль. Представим себе, например, замкнутую систему, состоящую из двух материальных точек, взаимодействующих между собой силами притяжения $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$. Если точки придут в движение навстречу друг другу, то каждая из сил $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$ совершит положительную работу. Будет положительной и работа обеих сил. Она пойдет на приращение кинетической энергии системы. Кинетическая энергия изменится под действием одних только внутренних сил. Следовательно, *приращение кинетической энергии определяется работой не только внешних, но и внутренних сил.*

4. Доказанная теорема для материальной точки имеет место и в релятивистской механике. Надо только изменить выражение для кинетической энергии. В релятивистской механике формула (22.7) также справедлива, однако при вычислении интеграла (22.7) надо учитывать зависимость массы от скорости. Масса определяется формулой

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Подставив в эту формулу $v = p/m$ и возведя в квадрат, получим

$$p^2 + (m_0 c)^2 = (mc)^2. \tag{22.10}$$

Дифференцированием этого соотношения находим

$$p\,dp = c^2 m\,dm.$$

А так как $p\,dp = \boldsymbol{p}\,d\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$, то

$$\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{p} = c^2\,dm.$$

Таким образом,

$$A_{12} = \int \boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{p} = \int_{m_1}^{m_2} c^2\,dm.$$

Отсюда

$$A_{12} = c^2(m_2 - m_1) = c^2\,\Delta m, \tag{22.11}$$

где m_1 и m_2 — массы материальной точки в начальном и конечном положениях.

Таким образом, *в релятивистской механике работа определяется только приращением массы материальной точки*. Этот результат проще соответствующего результата нерелятивистской механики. Введем обозначение

$$E = mc^2 \tag{22.12}$$

и назовем величину E *полной* или *релятивистской энергией частицы* (материальной точки). Тогда

$$A_{12} = E_2 - E_1. \tag{22.13}$$

В частном случае, когда частица покоится, ее релятивистская энергия определяется выражением

$$E_0 = m_0 c^2 \tag{22.14}$$

и называется *энергией покоя*. *Кинетическая энергия* есть часть релятивистской энергии, обусловленная движением частицы. Она представляется разностью

$$K = E - E_0 = (m - m_0) c^2, \tag{22.15}$$

или

$$K = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right). \tag{22.16}$$

Ясно, что работу A_{12} можно вычислить также по формуле

$$A_{12} = K_2 - K_1. \tag{22.17}$$

Если в формулу (22.10) ввести величины E и E_0, то получится

$$E^2 = E_0^2 + (pc)^2. \tag{22.18}$$

Эта формула выражает в релятивистской механике связь между импульсом частицы и ее полной энергией. Она справедлива не только для элементарных частиц, о структуре которых при современном уровне наших знаний ничего сказать нельзя, но и для составных частиц или систем, состоящих из нескольких частиц. Под m_0 и E_0 следует понимать массу и полную энергию такой системы в системе отсчета, относительно которой она покоится.

Формула (22.16) дает выражение для кинетической энергии в релятивистской механике. При медленных движениях она переходит в привычную формулу (22.8). Действительно, пользуясь формулой бинома Ньютона, можем написать

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \ldots$$

Когда $v^2/c^2 \ll 1$, можно оборвать это разложение на втором члене. Тогда формула (22.16) перейдет в формулу (22.8).

5. В атомной физике удобной единицей энергии является *электронвольт* (эВ). Это есть энергия, приобретаемая электроном в электрическом поле при прохождении разности потенциалов в один вольт:

$$1 \text{ эВ} = 1{,}602 \cdot 10^{-12} \text{ эрг}.$$

Употребляется также *килоэлектронвольт* (кэВ), равный 1000 эВ. В ядерной физике, а также в ускорительной технике употребляются более крупные единицы: *мегаэлектронвольт* (МэВ), равный 10^6 эВ, и гигаэлектронвольт (ГэВ), составляющий 10^9 эВ. Недавно стала употребляться еще более крупная единица — тераэлектронвольт (1ТэВ $= 10^{12}$ эВ). Энергия покоя для электрона и протона соответственно равна:

$$\text{для электрона } m_{0e}c^2 = 0{,}511 \text{ МэВ},$$
$$\text{для протона } m_{0p}c^2 = 938 \text{ МэВ}.$$

Если полная релятивистская энергия частицы E велика по сравнению с ее энергией покоя $E_0 = m_0c^2$, то говорят о движении с ультрарелятивистскими скоростями. Такие скорости получаются в ускорителях, они встречаются также в космических лучах.

Зная энергию ультрарелятивистской частицы, можно вычислить и ее скорость. Точнее, можно вычислить не самую скорость частицы (для этого недостаточна точность, с которой известна скорость света c), а разность между этой скоростью и скоростью света в вакууме. С этой целью перепишем формулу (22.12) в виде

$$E = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Отсюда получаем

$$E^2 (c+v)(c-v) = m_0^2c^6 = E_0^2c^2.$$

Так как скорость v близка к c, то во втором множителе $c+v$ величину v можно заменить на c. В результате получится

$$\frac{c-v}{c} = \frac{E_0^2}{2E^2}. \tag{22.19}$$

Для протонов с энергией $E = 10$ ГэВ получаем

$$\frac{c-v}{c} = \frac{0{,}938^2}{2 \cdot 10^2} = 0{,}0044.$$

Для электронов с энергией $E = 1$ ГэВ

$$\frac{c-v}{c} = \frac{0{,}511^2}{2 \cdot 10^6} = 1{,}3 \cdot 10^{-7}.$$

В космических лучах регистрировались протоны с энергией 10^{19} эВ $= 10^{10}$ ГэВ. В этом случае

$$\frac{c-v}{c} \sim 10^{-20},$$

т. е. скорость частицы отличается от скорости света всего на $3 \cdot 10^{-10}$ см/с.

ЗАДАЧИ

1. Через неподвижный блок, массой которого можно пренебречь, перекинута замкнутая тяжелая веревка массы M. В начальный момент времени за точку веревки, расположенную между блоком и нижним заворотом ее, цепляется обезьяна массы m и начинает карабкаться вверх так, чтобы удержаться на неизменной высоте. Какую мощность P должна для этого развивать обезьяна? Через сколько времени она перестанет справляться со своей затеей, если максимальная мощность, которую она может развивать, равна $P_{\text{макс}}$?

Ответ. $P = \frac{(mg)^2}{M} t$; $t = \frac{M}{(mg)^2} P_{\text{макс}}$.

2. Вывести формулу (21.6), являющуюся релятивистским обобщением формулы Циолковского для движения ракеты. Считать, что скорости ракеты и газовой струи направлены вдоль одной прямой.

Решение. Решение основано на релятивистских законах импульса и энергии (релятивистской массы). Они нами были сформулированы. Кроме того, требуется знать *релятивистский закон сложения скоростей,* который нами не формулировался. Читатель, желающий разобрать решение, приводимое ниже, должен обратиться к руководствам по теории относительности или принять на веру формулу (22.22), приводимую ниже.

Пусть m и v — масса покоя и скорость ракеты в произвольный момент времени t, а $m_{\text{газ}}$ и $v_{\text{газ}}$ — те же величины для газов, образовавшихся из топлива ракеты к этому моменту времени. Так как газы, уже покинувшие ракету, не оказывают влияния на ее движение, то можно принять $m_{\text{газ}} = 0$. Однако газы непрерывно образуются, так что $dm_{\text{газ}} \neq 0$. На основании закона сохранения импульса и энергии (релятивистской массы)

$$\frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}+\frac{m_{\text{газ}}v_{\text{газ}}}{\sqrt{1-\frac{v_{\text{газ}}^2}{c^2}}}=\text{const}, \tag{22.20}$$

$$\frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}+\frac{m_{\text{газ}}}{\sqrt{1-\frac{v_{\text{газ}}^2}{c^2}}}=\text{const}. \tag{22.21}$$

Дифференцируя уравнение (22.20) с учетом (22.21) и полагая в окончательном результате $m_{\text{газ}} = 0$, получим

$$\frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,dv+(v-v_{\text{газ}})\,d\,\frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=0.$$

По релятивистскому закону сложения скоростей

$$v_{\text{газ}}=\frac{v-v_{\text{отн}}}{1-\frac{vv_{\text{отн}}}{c^2}}, \tag{22.22}$$

где $v_{\text{отн}}$ — скорость газовой струи относительно ракеты. Исключая $v_{\text{газ}}$, после несложных преобразований находим

$$\frac{dv}{v^2-c^2}=\frac{v_{\text{отн}}}{c^2}\,\frac{dm}{m}.$$

Предполагая скорость $v_{\text{отн}}$ постоянной и интегрируя, получим

$$\frac{m_0}{m}=\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)^{\frac{c}{2v_{\text{отн}}}}. \tag{22.23}$$

§ 23. Связь между кинетическими энергиями в различных системах отсчета. Теорема Кёнига

Как ясно из формулы (22.8), кинетическая энергия тела зависит от выбора системы отсчета, относительно которой рассматривается его движение. Можно поставить вопрос, как преобразуется кинетическая энергия при переходе от одной системы отсчета к другой.