2. Вывести формулу (21.6), являющуюся релятивистским обобщением формулы Циолковского для движения ракеты. Считать, что скорости ракеты и газовой струи направлены вдоль одной прямой.

Решение. Решение основано на релятивистских законах импульса и энергии (релятивистской массы). Они нами были сформулированы. Кроме того, требуется знать *релятивистский закон сложения скоростей,* который нами не формулировался. Читатель, желающий разобрать решение, приводимое ниже, должен обратиться к руководствам по теории относительности или принять на веру формулу (22.22), приводимую ниже.

Пусть m и v — масса покоя и скорость ракеты в произвольный момент времени t, а $m_{\text{газ}}$ и $v_{\text{газ}}$ — те же величины для газов, образовавшихся из топлива ракеты к этому моменту времени. Так как газы, уже покинувшие ракету, не оказывают влияния на ее движение, то можно принять $m_{\text{газ}} = 0$. Однако газы непрерывно образуются, так что $dm_{\text{газ}} \neq 0$. На основании закона сохранения импульса и энергии (релятивистской массы)

$$\frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}+\frac{m_{\text{газ}}v_{\text{газ}}}{\sqrt{1-\frac{v_{\text{газ}}^2}{c^2}}}=\text{const}, \tag{22.20}$$

$$\frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}+\frac{m_{\text{газ}}}{\sqrt{1-\frac{v_{\text{газ}}^2}{c^2}}}=\text{const}. \tag{22.21}$$

Дифференцируя уравнение (22.20) с учетом (22.21) и полагая в окончательном результате $m_{\text{газ}} = 0$, получим

$$\frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,dv+(v-v_{\text{газ}})\,d\,\frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=0.$$

По релятивистскому закону сложения скоростей

$$v_{\text{газ}}=\frac{v-v_{\text{отн}}}{1-\frac{vv_{\text{отн}}}{c^2}}, \tag{22.22}$$

где $v_{\text{отн}}$ — скорость газовой струи относительно ракеты. Исключая $v_{\text{газ}}$, после несложных преобразований находим

$$\frac{dv}{v^2-c^2}=\frac{v_{\text{отн}}}{c^2}\,\frac{dm}{m}.$$

Предполагая скорость $v_{\text{отн}}$ постоянной и интегрируя, получим

$$\frac{m_0}{m}=\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)^{\frac{c}{2v_{\text{отн}}}}. \tag{22.23}$$

§ 23. Связь между кинетическими энергиями в различных системах отсчета. Теорема Кёнига

Как ясно из формулы (22.8), кинетическая энергия тела зависит от выбора системы отсчета, относительно которой рассматривается его движение. Можно поставить вопрос, как преобразуется кинетическая энергия при переходе от одной системы отсчета к другой.

Приведем решение этого вопроса в нерелятивистской механике. Сначала рассмотрим частный случай, когда тело состоит всего из одной материальной точки. Обозначим посредством K кинетическую энергию материальной точки в какой-либо системе отсчета S, а через K' — в другой системе S', движущейся относительно S поступательно со скоростью $\mathbf{V}$. (Скорость $\mathbf{V}$ может быть постоянной, но и может меняться во времени.) В нерелятивистской механике скорости $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}'$ и $\mathbf{V}$ связаны соотношением $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V}$. Поэтому

$$\frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} mv'^2 + \frac{1}{2} mV^2 + m\mathbf{v}'\mathbf{V},$$

или

$$K = K' + \frac{1}{2} mV^2 + (\mathbf{p}'\mathbf{V}), \tag{23.1}$$

где $\mathbf{p}' = m\mathbf{v}'$ — импульс материальной точки в системе S'. Формула (23.1) справедлива и для произвольной системы материальных точек. Чтобы убедиться в этом, достаточно написать соотношение (23.1) для каждой материальной точки системы, а затем просуммировать по всем точкам. Тогда получится снова формула (23.1), в которой под $\mathbf{p}'$ надо понимать импульс *всей системы материальных точек* в системе отсчета S', т. е. $\mathbf{p}' = m_1\mathbf{v}_1' + m_2\mathbf{v}_2' + \ldots$ Его можно представить в виде $\mathbf{p}' = m\mathbf{v}_c'$, где $\mathbf{v}_c'$ — скорость центра масс системы материальных точек относительно S', а m — ее суммарная масса. Таким образом,

$$K = K' + \frac{1}{2} mV^2 + m(\mathbf{V}\mathbf{v}_c'). \tag{23.2}$$

Если центр массы покоится в системе S', т. е. $\mathbf{v}_c' = 0$, то

$$K = K' + \frac{1}{2} mV^2. \tag{23.3}$$

Это равенство выражает так называемую *теорему Кёнига: кинетическая энергия системы материальных точек равна сумме кинетической энергии всей массы системы, мысленно сосредоточенной в ее центре масс и движущейся вместе с ним, и кинетической энергии той же системы в ее относительном движении по отношению к поступательно движущейся системе координат с началом в центре масс.*

§ 24. Консервативные и неконсервативные силы

1. Все силы, встречающиеся в макроскопической механике, принято разделять на *консервативные* и *неконсервативные*. Прежде чем вводить эти понятия, рассмотрим некоторые примеры.

Вычислим сначала работу силы тяжести, которую она совершает при переходе материальной точки из положения *1* в положение *2*