Приведем решение этого вопроса в нерелятивистской механике. Сначала рассмотрим частный случай, когда тело состоит всего из одной материальной точки. Обозначим посредством K кинетическую энергию материальной точки в какой-либо системе отсчета S, а через K' — в другой системе S', движущейся относительно S поступательно со скоростью $\boldsymbol{V}$. (Скорость $\boldsymbol{V}$ может быть постоянной, но и может меняться во времени.) В нерелятивистской механике скорости $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v}'$ и $\boldsymbol{V}$ связаны соотношением $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{V}$. Поэтому

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}mV^2 + m\boldsymbol{v}'\boldsymbol{V},$$

или

$$K = K' + \frac{1}{2}mV^2 + (\boldsymbol{p}'\boldsymbol{V}), \tag{23.1}$$

где $\boldsymbol{p}' = m\boldsymbol{v}'$ — импульс материальной точки в системе S'. Формула (23.1) справедлива и для произвольной системы материальных точек. Чтобы убедиться в этом, достаточно написать соотношение (23.1) для каждой материальной точки системы, а затем просуммировать по всем точкам. Тогда получится снова формула (23.1), в которой под $\boldsymbol{p}'$ надо понимать импульс *всей системы материальных точек* в системе отсчета S', т. е. $\boldsymbol{p}' = m_1\boldsymbol{v}_1' + m_2\boldsymbol{v}_2' + \ldots$ Его можно представить в виде $\boldsymbol{p}' = m\boldsymbol{v}_c'$, где $\boldsymbol{v}_c'$ — скорость центра масс системы материальных точек относительно S', а m — ее суммарная масса. Таким образом,

$$K = K' + \frac{1}{2}mV^2 + m(\boldsymbol{V}\boldsymbol{v}_c'). \tag{23.2}$$

Если центр массы покоится в системе S', т. е. $\boldsymbol{v}_c' = 0$, то

$$K = K' + \frac{1}{2}mV^2. \tag{23.3}$$

Это равенство выражает так называемую *теорему Кёнига: кинетическая энергия системы материальных точек равна сумме кинетической энергии всей массы системы, мысленно сосредоточенной в ее центре масс и движущейся вместе с ним, и кинетической энергии той же системы в ее относительном движении по отношению к поступательно движущейся системе координат с началом в центре масс.*

§ 24. Консервативные и неконсервативные силы

1. Все силы, встречающиеся в макроскопической механике, принято разделять на *консервативные* и *неконсервативные*. Прежде чем вводить эти понятия, рассмотрим некоторые примеры.

Вычислим сначала работу силы тяжести, которую она совершает при переходе материальной точки из положения *1* в положение *2* вдоль прямолинейного отрезка *12* (рис. 38). Примером может служить скольжение без трения материальной точки по гладкой наклонной плоскости. Очевидно, эта работа равна $A_{12} = mgs\cos\alpha$, или

$$A_{12} = mg(h_1 - h_2) = mgh_1 - mgh_2, \tag{24.1}$$

где h_1 и h_2 — высоты, на которых находилась материальная точка в начале и конце пути, отсчитанные от какого-либо произвольного уровня, например от земной поверхности или от уровня моря. Формула (24.1) остается справедливой и при перемещении вдоль

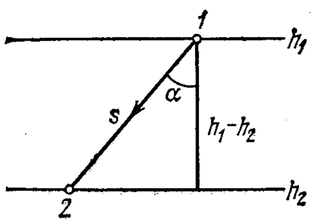

Рис. 38.

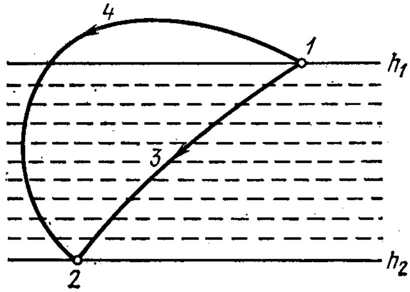

Рис. 39.

произвольной кривой, например по пути *132* (рис. 39). Это станет очевидным, если разбить весь путь *132* горизонтальными плоскостями на малые участки, каждый из которых может быть принят за прямолинейный. Применив к каждому участку формулу (24.1) и сложив полученные работы, мы придем к прежнему результату (24.1). Если вместо пути *132* взять любой другой путь *142* между теми же начальным и конечным положениями *1* и *2*, то работа силы тяжести не изменится, так как она определяется только разностью высот $h_1 - h_2$, которая от формы пути не зависит. Таким образом, *работа силы тяжести не зависит от формы пути, а определяется только начальным и конечным положениями перемещающейся точки.*

2. В качестве второго примера рассмотрим работу при перемещении материальной точки в поле центральных сил. Сила называется *центральной,* если она направлена к одной и той же точке (или от одной и той же точки) и зависит только от расстояния до этой точки, называемой *центром сил* или *силовым центром.* Примером может служить сила гравитационного притяжения, с которой Солнце действует на планету, или сила электростатического взаимодействия двух точечных зарядов. По определению элементарной работы $dA = F\,ds\cos(\boldsymbol{F}, d\boldsymbol{s})$. Величина $ds\cos(\boldsymbol{F}, d\boldsymbol{s})$ есть проекция элементарного перемещения $d\boldsymbol{s}$ на направление силы, или, что то же самое, на направление радиуса-вектора $\boldsymbol{r}$ (если за положительное направление силы принять направление от силового центра O). Следовательно, $ds \cos(\boldsymbol{F}, d\boldsymbol{s}) = dr$, где dr — элементарное приращение длины r, т. е. расстояние материальной точки от силового центра (рис. 40). Таким образом, $dA = F(r)\,dr$, причем по предположению величина силы F зависит только от расстояния r. Поэтому работа A_{12} выразится определенным интегралом

$$A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} F(r)\,dr, \tag{24.2}$$

значение которого зависит *только от расстояний* r_1 *и* r_2 точек *1* и *2* до силового центра O, но *не зависит от формы пути,* по которому материальная точка перешла из начального положения *1* в конечное положение *2*. В формулу (24.2) путь перехода вообще не входит, в нее входят только расстояния до силового центра.

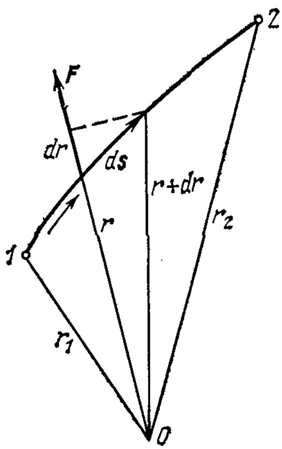

Рис. 40.

3. Допустим, что в силовом центре помещено *физическое тело* (материальная точка), взаимодействующее с рассматриваемой материальной точкой (которая с тем же основанием может быть принята за силовой центр). При взаимодействии перемещается как материальная точка, так и силовой центр. При выводе формулы (24.2) перемещение силового центра не принималось во внимание. Однако справедливость самой формулы не связана с этим ограничением. *Работа* A_{12} *зависит только от относительного перемещения материальных точек, но не может зависеть от абсолютных перемещений каждой из точек в отдельности. В этом можно убедиться простым* вычислением. Пусть взаимодействуют две материальные точки *1* и *2*, причем силы взаимодействия $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$ подчиняются третьему закону Ньютона. Обозначим посредством $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}_2$ радиусы-векторы этих точек, проведенные из какого-либо неподвижного начала. Тогда для элементарной работы можно написать $dA = \boldsymbol{F}_1 d\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{F}_2 d\boldsymbol{r}_2$. По третьему закону Ньютона $\boldsymbol{F}_1 = -\boldsymbol{F}_2$, а потому $dA = \boldsymbol{F}_2(d\boldsymbol{r}_2 - d\boldsymbol{r}_1) = \boldsymbol{F}_2 d(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)$. Но $\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$ есть радиус-вектор точки *2* относительно точки *1*. Обозначим его $\boldsymbol{r}_{12}$. Тогда

$$dA = \boldsymbol{F}_2\, d\boldsymbol{r}_{12}. \tag{24.3}$$

Значит, при вычислении элементарной, а с ней и полной работы точка *1* может считаться неподвижной, а точка *2* — перемещающейся относительно нее. Можно было бы, конечно, считать неподвижной точку *2*, а точку *1* движущейся. Результат получился бы тот же самый. Вообще, как и раньше, выражение (24.3) может быть преобразовано к виду

$$dA = F(r)\,dr. \tag{24.4}$$

Сюда входят только расстояние между взаимодействующими точками r и его приращение dr. Отсюда немедленно получается формула (24.2), что и доказывает наше утверждение.

Отметим одно следствие формулы (24.2). Допустим, что материальные точки *1* и *2* соединены абсолютно жестким стержнем. При такой идеализации расстояние между взаимодействующими точками будет оставаться неизменным при любых их перемещениях: $dr = 0$. Поэтому всегда будет равен нулю интеграл в формуле (24.2), а с ним и работа сил взаимодействия материальных точек *1* и *2* на любом перемещении. Так называемые абсолютно твердые тела могут рассматриваться как системы материальных точек, расстояния между которыми не меняются при любых движениях. Такая неизменяемость обеспечивается внутренними силами или силами связей, действующими между материальными точками системы. Всю систему можно мысленно разбить на пары взаимодействующих точек и применить к ним доказанное выше следствие. Отсюда следует, что *работа внутренних сил, действующих в абсолютно твердых телах, равна нулю при любых движениях*. Реальные тела не являются абсолютно твердыми. Действующие в них силы обусловлены связями, которые могут быть очень жесткими, но не бесконечно жесткими. Работа таких сил, вообще говоря, отлична от нуля. Однако по мере увеличения жесткости работа становится все меньше и меньше и в пределе для бесконечно жестких связей обращается в нуль.

Результаты, полученные для двух материальных точек, обобщаются на случай произвольной системы материальных точек, между которыми действуют центральные силы. Если задать положение каждой материальной точки, то этим определится и положение всей системы или ее *конфигурация*. *Работа центральных сил не зависит от способа (или «пути») перехода системы из начальной конфигурации в конечную — она определяется исключительно самими конфигурациями*.

4. Если силы взаимодействия зависят только от конфигурации материальных точек системы (т. е. от их координат) и работа этих сил при перемещении системы из произвольного начального положения в произвольное конечное положение не зависит от пути перехода, а определяется только начальной и конечной конфигурациями системы, то такие силы называются *консервативными*. Рассмотренные нами примеры показывают, что *сила тяжести и все центральные силы являются силами консервативными*.

Можно дать другое определение консервативных сил, эквивалентное приведенному. Пусть система из положения *1* (рис. 41) перешла в положение *2* по пути *132*. (Мы символически изображаем положение системы точкой на плоскости, а путь перехода — линией, хотя буквально такой способ применим лишь для системы, состоящей всего из одной материальной точки.) При этом будет совершена работа A_{132}. Если бы система перешла в положение *2* по пути *142*, то совершенная работа была бы равна A_{142}. По определению консервативных сил $A_{132} = A_{142}$. Так как силы зависят только от конфигурации системы, то $A_{142} = -A_{241}$, где A_{241} — работа, которая была бы совершена при переходе системы из положения *2* в положение *1* по тому же пути, но в обратном порядке, т. е. по пути *241*. Таким образом, $A_{132} + A_{241} = 0$. Но сумма $A_{132} + A_{241}$ есть работа, совершенная силами, когда система вернулась в исходное положение *1*. В этом случае говорят о работе по *«замкнутому пути»*. Итак, *работа консервативных сил по любому замкнутому пути равна нулю*. Проведя это рассуждение в обратном порядке, без труда докажем, что из обращения в нуль работы по любому замкнутому пути следует независимость величины работы от пути перехода. Поэтому можно дать еще такое определение консервативных сил. *Консервативными* называются силы, зависящие только от конфигурации системы, и работа которых по любому замкнутому пути равна нулю.

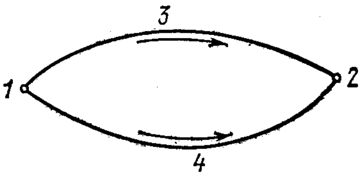

Рис. 41.

5. Все силы, не являющиеся консервативными, называются *неконсервативными силами*. К ним относятся, прежде всего, так называемые *диссипативные силы*, например силы трения, возникающие при скольжении какого-либо тела по поверхности другого. Сюда же относятся силы сопротивления, испытываемые телом при движении в жидкой или газообразной среде. Их также иногда называют силами трения (см. § 17). Все эти силы зависят не только от конфигурации тел, но и от их *относительных скоростей*. Они направлены всегда против скорости тела (относительно поверхности, по которой оно скользит, или относительно сопротивляющейся среды, в которой оно движется). Поэтому, если тело скользит по неподвижной поверхности или движется в «неподвижной» сопротивляющейся среде, то при любом движении тела работа сил трения, действующих на него, отрицательна. Но работа сил трения может быть и положительной, когда поверхность или среда сами движутся. Рассмотрим, например, тело B, по поверхности которого скользит тело C (рис. 42) с относительной скоростью $\boldsymbol{v}_{\text{отн}}$.

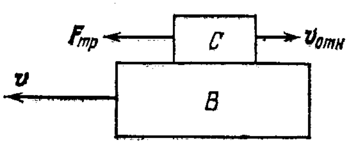

Рис. 42.

Сила трения $F_{тр}$, действующая на тело C, направлена против вектора $\boldsymbol{v}_{отн}$. Допустим, что само тело B движется в противоположном направлении со скоростью $\boldsymbol{v}$. Если $v > v_{отн}$, то в «неподвижной» системе отсчета тело C движется со скоростью $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_{отн}$ в том же направлении, куда действует сила трения. Сила трения ежесекундно совершает над телом C положительную работу $A_1 = F_{тр}(v - v_{отн})$. Однако, если система замкнута, то полная работа сил трения, действующих на все тела системы, всегда отрицательна. Так, в приведенном примере сила трения, действующая на тело B, совершает отрицательную работу $A_2 = -F_{тр}v$. Полная работа сил трения равна $A = A_1 + A_2 = -F_{тр} \cdot v_{отн}$, т. е. отрицательна. Поэтому мы даем следующее определение диссипативных сил. *Диссипативными* называются такие силы, полная работа которых при любых движениях в замкнутой системе всегда отрицательна.

6. Отметим, наконец, еще один вид неконсервативных сил, называемых *гироскопическими силами. Эти силы зависят от скорости материальной точки и действуют всегда перпендикулярно к этой скорости.* Работа таких сил равна нулю при любом перемещении материальной точки, в частности при ее движении по замкнутому пути. От консервативных гироскопические силы отличаются тем, что они определяются не только положением, но и скоростью движущейся материальной точки. Единственным примером гироскопических сил, известных в физике, является *сила Лоренца,* т. е. сила, действующая на заряженную частицу в магнитном поле. Она пропорциональна векторному произведению $[\boldsymbol{vB}]$, т. е. перпендикулярна как к направлению скорости $\boldsymbol{v}$, так и к вектору *напряженности магнитного поля* $\boldsymbol{B}$. Правда, в механике встречаются гироскопические силы и иного рода. Это так называемые *силы Кориолиса.* Однако эти силы не являются «настоящими силами» в смысле механики Ньютона. При рассмотрении движений относительно инерциальных систем отсчета (а только такие движения мы сейчас и рассматриваем) такие «силы» вообще не существуют. Они вводятся искусственно при рассмотрении движений в системах отсчета, вращающихся относительно инерциальных, чтобы придать уравнениям движения в таких системах формально такой же вид, что и в инерциальных системах отсчета (см. гл. IX).

§ 25. Потенциальная энергия. Закон сохранения энергии в механике

1. Если на систему действуют одни только консервативные и гироскопические силы, то можно для нее ввести понятие *потенциальной энергии.* Какое-либо произвольное положение системы, характеризующееся заданием координат ее материальных точек, условно примем за *нулевое.* Работа, совершаемая консервативными