Сила трения $\boldsymbol{F}_{тр}$, действующая на тело C, направлена против вектора $\boldsymbol{v}_{отн}$. Допустим, что само тело B движется в противоположном направлении со скоростью $\boldsymbol{v}$. Если $v > v_{отн}$, то в «неподвижной» системе отсчета тело C движется со скоростью $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_{отн}$ в том же направлении, куда действует сила трения. Сила трения ежесекундно совершает над телом C положительную работу $A_1 = F_{тр}(v - v_{отн})$. Однако, если система замкнута, то полная работа сил трения, действующих на все тела системы, всегда отрицательна. Так, в приведенном примере сила трения, действующая на тело B, совершает отрицательную работу $A_2 = -F_{тр}v$. Полная работа сил трения равна $A = A_1 + A_2 = -F_{тр} \cdot v_{отн}$, т. е. отрицательна. Поэтому мы даем следующее определение диссипативных сил. *Диссипативными* называются такие силы, полная работа которых при любых движениях в замкнутой системе всегда отрицательна.

6. Отметим, наконец, еще один вид неконсервативных сил, называемых *гироскопическими силами. Эти силы зависят от скорости материальной точки и действуют всегда перпендикулярно к этой скорости.* Работа таких сил равна нулю при любом перемещении материальной точки, в частности при ее движении по замкнутому пути. От консервативных гироскопические силы отличаются тем, что они определяются не только положением, но и скоростью движущейся материальной точки. Единственным примером гироскопических сил, известных в физике, является *сила Лоренца,* т. е. сила, действующая на заряженную частицу в магнитном поле. Она пропорциональна векторному произведению $[\boldsymbol{vB}]$, т. е. перпендикулярна как к направлению скорости $\boldsymbol{v}$, так и к вектору *напряженности магнитного поля* $\boldsymbol{B}$. Правда, в механике встречаются гироскопические силы и иного рода. Это так называемые *силы Кориолиса*. Однако эти силы не являются «настоящими силами» в смысле механики Ньютона. При рассмотрении движений относительно инерциальных систем отсчета (а только такие движения мы сейчас и рассматриваем) такие «силы» вообще не существуют. Они вводятся искусственно при рассмотрении движений в системах отсчета, вращающихся относительно инерциальных, чтобы придать уравнениям движения в таких системах формально такой же вид, что и в инерциальных системах отсчета (см. гл. IX).

§ 25. Потенциальная энергия. Закон сохранения энергии в механике

1. Если на систему действуют одни только консервативные и гироскопические силы, то можно для нее ввести понятие *потенциальной энергии*. Какое-либо произвольное положение системы, характеризующееся заданием координат ее материальных точек, условно примем за *нулевое*. Работа, совершаемая консервативными силами при переходе системы из рассматриваемого положения в нулевое, называется потенциальной энергией системы в первом положении. Работа консервативных сил не зависит от пути перехода, а потому потенциальная энергия системы при фиксированном нулевом положении зависит только от координат материальных точек системы в рассматриваемом положении. Иными словами, *потенциальная энергия системы U является функцией только ее координат.*

Значение потенциальной энергии зависит от того, какое положение системы условно принято за нулевое. Если за нулевое принять положение O (рис. 43, *а*), то в положении *1* система будет обладать потенциальной энергией $U = A_{1O}$, равной работе консервативных сил при переходе системы из положения *1* в положение O.

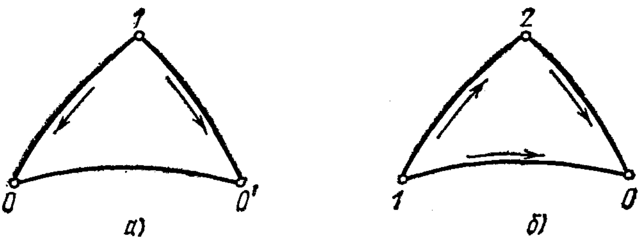

Рис. 43.

Если же за нулевое принять положение O', то потенциальная энергия будет равна $U' = A_{1O'}$. Вследствие консервативности сил, действующих в системе, работа вдоль пути $1O'$ равна работе вдоль пути $1OO'$: $A_{1O'} = A_{1O} + A_{OO'}$, или $U' = U + A_{OO'}$. Работа $A_{OO'}$ постоянна, т. е. не зависит от координат системы в рассматриваемом состоянии *1*. Она полностью определяется выбором нулевых положений O и O'. Мы видим, что при замене одного нулевого положения другим потенциальная энергия системы меняется на постоянную величину. Неопределенность можно усилить еще больше, если условиться считать потенциальную энергию в нулевом положении равной не нулю, а какому-либо постоянному произвольному значению. Тогда в приведенном выше определении вместо потенциальной энергии следует говорить о ее *разности* в двух положениях. *Разностью потенциальных энергий в рассматриваемом и нулевом положениях* называется работа, совершаемая консервативными силами при переходе системы из рассматриваемого в нулевое положение. Таким образом, *потенциальная энергия системы определена не однозначно,* а *с точностью до произвольной постоянной.* Этот произвол не может отразиться на физических выводах, так как ход физических явлений может зависеть не от абсолютных значений самой потенциальной энергии, а лишь от ее разностей в различных состояниях. Эти же разности от выбора произвольной постоянной не зависят.

Пусть система перешла из положения *1* в положение *2* по какому-либо пути *12* (рис. 43, *б*). Работу A_{12}, совершенную консервативными силами при таком переходе, можно выразить через потенциальные энергии U_1 и U_2 в состояниях *1* и *2*. С этой целью вообразим, что переход осуществлен через нулевое положение O, т. е. по пути *1O2*. Так как силы консервативны, то $A_{12} = A_{1O2} = A_{1O} + A_{O2} = A_{1O} - A_{2O}$. По определению потенциальной энергии $U_1 = A_{1O} + C$, $U_2 = A_{2O} + C$, где C — одна и та же аддитивная постоянная. Таким образом,

$$A_{12} = U_1 - U_2, \tag{25.1}$$

т. е. *работа консервативных сил равна убыли потенциальной энергии системы.*

2. Та же работа A_{12}, как было показано, может быть выражена через приращение кинетической энергии по формуле (22.9). Приравнивая выражения (22.9) и (25.1), получим $K_2 - K_1 = U_1 - U_2$, откуда

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2.$$

Сумма кинетической и потенциальной энергий системы называется ее *полной энергией* E. Таким образом, $E_1 = E_2$, или

$$E \equiv K + U = \text{const}. \tag{25.2}$$

В системе с одними только консервативными (и гироскопическими) силами полная энергия остается неизменной. Могут происходить лишь превращения потенциальной энергии в кинетическую и обратно, но полный запас энергии системы измениться не может. Это положение называется *законом сохранения энергии в механике.*

3. Вычислим потенциальную энергию в некоторых простейших случаях.

а) Потенциальная энергия тела в однородном поле тяжести. Если материальная точка, находящаяся на высоте h, упадет на нулевой уровень (т. е. уровень, для которого $h = 0$), то сила тяжести совершит работу $A = mgh$. Поэтому на высоте h материальная точка обладает потенциальной энергией $U = mgh + C$. За нулевой можно принять произвольный уровень, например, уровень пола (если опыт производится в лаборатории), уровень моря и т. д. Постоянная C равна потенциальной энергии на нулевом уровне. Полагая ее равной нулю, получим

$$U = mgh. \tag{25.3}$$

б) Потенциальная энергия растянутой пружины. Упругие силы, возникающие при растяжении или сжатии пружины, являются центральными силами. Поэтому они консервативны, и имеет смысл говорить о потенциальной энергии деформированной пружины. Ее называют *упругой энергией*. Обозначим через x *растяжение* *пружины,* т. е. разность $x = l - l_0$ длин пружины в деформированном и недеформированном состояниях. Упругая сила F зависит только от растяжения. Если растяжение x не очень велико, то она пропорциональна ему: $F = kx$ (закон Гука, см. § 11). При возвращении пружины из деформированного в недеформированное состояние сила F совершает работу

$$A = \int_0^x F\,dx = k\int_0^x x\,dx = \frac{1}{2}kx^2.$$

Если упругую энергию пружины в недеформированном состоянии условиться считать равной нулю, то

$$U = \frac{1}{2}kx^2. \tag{25.4}$$

в) Потенциальная энергия гравитационного притяжения двух материальных точек. По закону всемирного тяготения Ньютона гравитационная сила притяжения двух точечных тел пропорциональна произведению их масс Mm и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними:

$$F = G\frac{Mm}{r^2}, \tag{25.5}$$

где G — *гравитационная постоянная.* Силы гравитационного притяжения, как силы центральные, являются консервативными. Для них имеет смысл говорить о потенциальной энергии. При вычислении этой энергии одну из масс, например M, можно считать неподвижной, а другую — перемещающейся в ее гравитационном поле. При перемещении массы m из бесконечности гравитационные силы совершают работу

$$A = \int_r^\infty G\frac{Mm}{r^2}\,dr = G\frac{Mm}{r},$$

где r — расстояние между массами M и m в конечном состоянии. Эта работа равна убыли потенциальной энергии:

$$A = U_\infty - U(r).$$

Обычно потенциальную энергию в бесконечности U_∞ принимают равной нулю. При таком соглашении

$$U = -G\frac{Mm}{r}. \tag{25.6}$$

Величина (25.6) отрицательна. Это имеет простое объяснение. Максимальной энергией притягивающиеся массы обладают при бесконечном расстоянии между ними. В этом положении потенциальная энергия считается равной нулю. Во всяком другом положении она меньше, т. е. отрицательна.

4. Допустим теперь, что в системе наряду с консервативными и гироскопическими силами действуют также диссипативные силы. Работа всех сил A_{12} при переходе системы из положения *1* в положение *2* по-прежнему равна приращению ее кинетической энергии $K_2 - K_1$. Но в рассматриваемом случае эту работу можно представить в виде суммы работы консервативных сил $A_{12}^{\text{кон}}$ и работы диссипативных сил $A_{12}^{\text{дис}}$. Первая работа может быть выражена через убыль потенциальной энергии системы: $A_{12}^{\text{кон}} = U_1 - U_2$. Поэтому

$$A_{12} = U_1 - U_2 + A_{12}^{\text{дис}}.$$

Приравнивая это выражение приращению кинетической энергии, получим

$$K_2 - K_1 = U_1 - U_2 + A_{12}^{\text{дис}},$$

или

$$E_2 - E_1 = A_{12}^{\text{дис}}, \tag{25.7}$$

где $E = K + U$ — полная энергия системы. Таким образом, в рассматриваемом случае механическая энергия E системы не остается постоянной, а уменьшается, так как работа диссипативных сил $A_{12}^{\text{дис}}$ отрицательна.

Уравнение (25.7) можно обобщить. Разделим все действующие силы на две группы. К первой группе отнесем силы, учитываемые посредством потенциальной энергии U, ко второй — все остальные силы, как внутренние, так и внешние, действующие в системе. Обозначим A_{12} работу сил второй группы. Тогда, рассуждая так же, как и при выводе формулы (25.7), получим

$$E_2 - E_1 = A_{12}. \tag{25.8}$$

5. Допустим снова, что диссипативные силы в системе не действуют. Тогда справедлив закон сохранения энергии в форме (25.2). Поскольку кинетическая энергия K по своему смыслу не может быть отрицательной, из формулы (25.2) следует, что $E \geqslant U$. Этим соотношением определяется *область изменения всех координат системы,* в которой она может находиться при заданной полной энергии E. В область, где $U > E$, система попасть не может, так как потенциальная энергия не может превышать полную.

Рассмотрим в качестве примера одномерное движение частицы, когда она движется вдоль определенной прямой линии. Примем эту линию за координатную ось X. На оси X величина U будет функцией только x: $U = U(x)$. Если E — полная энергия частицы, то частица может находиться только в тех местах оси X, где $U(x) \leqslant E$. Допустим, что график функции $U(x)$ имеет вид, изображенный на рис. 44. Проведем на этом рисунке горизонтальную прямую $U = E_1$, где E_1 — какая-то постоянная. Пусть эта прямая пересекает *«потенциальную кривую»* $U = U(x)$ в трех точках A, B, C с координатами x_A, x_B, x_C. Сразу видно, что частица с полной энергией E_1 не может находиться в областях I и III. Она может двигаться либо в области II, либо в области IV. Переходить из области II в область IV или обратно частица не может. Этому препятствует *«потенциальный барьер»* BNC на потенциальной кривой. В области II частица с полной энергией E_1 будет совершать так называемое *финитное движение,* т. е. движение, происходящее в ограниченной части пространства. Она окажется запертой в *«потенциальной яме»* AMB и будет совершать колебания между крайними точками x_A и x_B, называемыми *точками поворота*. Если же частица находится в области IV и движется налево, то она, достигнув точки x_C, повернет обратно и далее будет «уходить на бесконечность». Такое движение называется *инфинитным*.

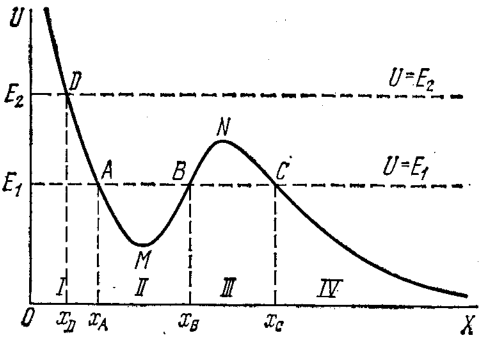

Рис. 44.

Пусть теперь частица обладает большей энергией $E_2 > E_1$, и горизонтальная прямая $U = E_2$ пересекает потенциальную кривую в единственной точке D с абсциссой x_D. Тогда для частицы окажется доступной вся область пространства правее точки x_D, и движение в этой области будет инфинитным.

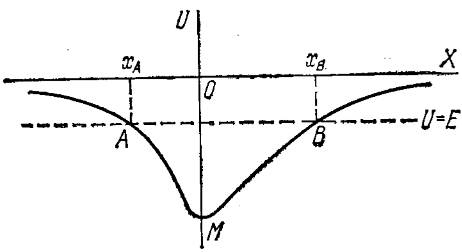

Рис. 45.

Допустим, что потенциальная яма имеет характер кривой, изображенной на рис. 45. По обе стороны от точки M обе ветви потенциальной кривой монотонно поднимаются вверх. Пусть при $x = \pm\infty$ функция $U(x)$ обращается в нуль, т. е. ось абсцисс является для потенциальной кривой *асимптотой*. Тогда можно утверждать, что *движение частицы будет финитным, если ее полная энергия отрицательна, и инфинитным, если она положительна.*

Для уяснения качественного характера движения частицы в силовом поле с потенциальной энергией $U(x)$ полезна следующая иллюстрация. Изготовим идеально твердую и идеально гладкую дорожку, форма которой точно совпадает с профилем потенциальной кривой $U = U(x)$ (например, кривой, изображенной на рис. 44). Поместим такую дорожку в однородное поле тяжести и положим на нее на некоторой высоте маленький шарик. Тогда движение шарика под действием силы тяжести будет почти точно воспроизводить движение материальной точки в рассматриваемом силовом поле $U = U(x)$, если только надлежащим образом подобрать ее полную энергию. Некоторая неточность иллюстрации связана с тем, что при движении шарика по дорожке возникает вращение, на что расходуется часть энергии. Иллюстрация совершенно точно передавала бы все черты искомого движения, если бы шарик не катался по дорожке, а скользил по ней без трения. Если такой шарик поместить без начальной скорости в точку A (рис. 44), то он будет совершать колебания по дуге AMB между крайними точками A и B. Если его поместить в точку D, то он сможет преодолеть потенциальный барьер BNC и «уйти на бесконечность».

6. Для финитных движений справедлива так называемая *теорема вириала*, имеющая многочисленные применения в различных отделах физики. Она была сформулирована и доказана Клаузиусом (1822—1888). Для произвольной системы материальных точек можно написать

$$\frac{d}{dt}\sum \boldsymbol{pr} = \sum \boldsymbol{rF} + \sum \boldsymbol{pv},$$

так как $\dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{F}$, $\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{v}$ (суммирование ведется по всем материальным точкам системы). Последнее слагаемое в правой части есть удвоенная кинетическая энергия системы: $2K = \sum \boldsymbol{pv} = \sum mv^2$, и предыдущее соотношение можно переписать в виде

$$K = -\frac{1}{2}\sum \boldsymbol{rF} + \frac{d}{dt}\sum \frac{1}{2}(\boldsymbol{pr}). \tag{25.9}$$

Величина $-\frac{1}{2}\sum \boldsymbol{rF}$ называется *вириалом сил*, действующих в системе.

Назовем *средним по времени значением функции* $f(t)$ на временнóм *интервале* $(t,\ t+T)$ величину, определяемую выражением

$$\overline{f(t)} = \frac{1}{T}\int\limits_{t}^{t+T} f(t')\,dt'. \tag{25.10}$$

Если функция $f(t)$ периодична, то в качестве времени T обычно берут ее период. Если же $f(t)$ не периодична, но ограничена, то время T берут достаточно большим и переходят к пределу

$$\bar{f} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_{t}^{t+T} f(t')\,dt', \tag{25.11}$$

предполагая, конечно, что предел существует. Если $f(t)$ есть производная ограниченной функции по времени: $f = \frac{d\varphi}{dt}$, то $\bar{f} = 0$. Действительно,

$$\bar{f} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_{t}^{t+T}\frac{d\varphi}{dt'}\,dt' = \lim_{T\to\infty}\frac{\varphi(t+T)-\varphi(t)}{T}.$$

Имея это в виду, усредним соотношение (25.9) по времени, устремляя T к бесконечности. Тогда для финитного движения последнее слагаемое в (25.9) даст нуль, и мы получим

$$\overline{K}=-\frac{1}{2}\overline{\sum rF}. \tag{25.12}$$

В случае финитных движений среднее по времени значение кинетической энергии системы равно среднему по времени значению вириала сил, действующих в системе. Это и есть теорема вириала Клаузиуса.

ЗАДАЧИ

1. Определить отношение потенциальных энергий деформации U_1 и U_2 двух пружин с коэффициентами упругости k_1 и k_2 в двух случаях: а) пружины соединены последовательно и растягиваются грузом P (рис. 46, *а*); б) пружины висят параллельно, причем груз P подвешен в такой точке, что обе пружины растягиваются на одну и ту же величину (рис. 46, *б*). Деформацией пружин под действием собственного веса пренебречь.

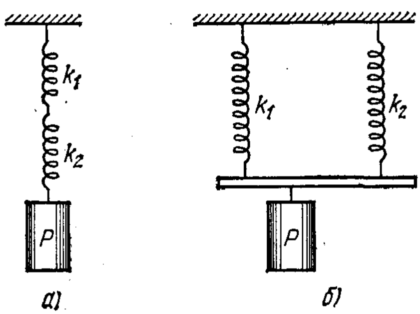

Рис. 46.

Ответ. а) $\frac{U_1}{U_2}=\frac{k_2}{k_1}$; б) $\frac{U_1}{U_2}=\frac{k_1}{k_2}$. Когда одна из пружин — очень жесткая по сравнению с другой, практически вся потенциальная энергия будет запасена в случае а) в более мягкой, а в случае б) — в более жесткой пружине.

2. Два протона с энергией $E=0{,}5$ МэВ каждый летят навстречу друг другу и испытывают лобовое столкновение. Как близко могут сойтись они, если учитывать только электростатическое взаимодействие между ними?

Ответ. $r=\frac{e^2}{2E}$, где e — заряд протона. Для вычислений формулу целесообразно преобразовать, положив $E=eV$. Тогда $r=\frac{e}{2V}=1{,}4\cdot10^{-13}$ см ($2V=10^6$ В). Опыты по рассеянию ядерных частиц показали, что радиус действия ядерных сил по порядку величины равен 10^{-13} см. Поэтому при расчете столкновения протонов, энергии которых превосходят примерно 0,5 МэВ, помимо электростатических сил надо учитывать также ядерные силы.

3. Три электрона в состоянии покоя находятся в вершинах правильного треугольника со стороной $a=1$ см. После этого они начинают двигаться под действием взаимного отталкивания. Определить предельное значение их скоростей.

Ответ. $v=\sqrt{\frac{2e^2}{ma}}=2{,}2\cdot10^4$ см/с.

4. Решить задачу 3 для релятивистских скоростей. При каких расстояниях a можно пользоваться нерелятивистским приближением?

Ответ. $v=c\,\dfrac{\sqrt{2m_0c^2\,\frac{e^2}{a}+\frac{e^4}{a^2}}}{m_0c^2+\frac{e^2}{a}}$.

Нерелятивистское приближение справедливо при

$$a \gg \frac{e^2}{m_0c^2} = 2{,}8 \cdot 10^{-13} \text{ см.}$$

5. При каких расстояниях a в задаче 3 квантовые поправки не играют роли?

Ответ. При $a \gg \frac{h^2}{2me^2} \approx 10^{-7}$ см.

6. Четыре электрона в состоянии покоя находятся в вершинах квадрата со стороной $a = 1$ см. После этого они начинают двигаться под действием взаимного отталкивания. Определить предельное значение их скоростей.

Ответ. $v = \sqrt{\left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{e^2}{ma}} = 2{,}6 \cdot 10^4$ см/с.

7. Материальная точка совершает одномерное финитное движение в потенциальном силовом поле между точками поворота x_A и x_B (см. рис. 45). Показать, что время движения ее от точки x_A к точке x_B равно времени обратного движения от точки x_B к точке x_A.

8. Материальная точка (например, шарик на пружине) под действием квазиупругой силы $F = -kx$ совершает колебания вдоль оси X вокруг положения равновесия. Пользуясь теоремой вириала, показать, что средние по времени значения кинетической и потенциальной энергий при таком колебании одинаковы.

9. Идеально упругий шарик движется вверх и вниз в однородном поле тяжести, отражаясь от пола по законам упругого удара. Найти связь между средними по времени значениями его кинетической $\bar{K}$ и потенциальной $\bar{U}$ энергий.

Решение. Поместим начало координат в одной из точек пола, направив ось X вертикально вверх. Тогда сила давления пола на шарик не будет влиять на величину вириала, так как она действует только в таких положениях шарика, когда $x = 0$. Надо учитывать только силу тяжести $F = -mg$ (минус потому, что сила F действует вниз, т. е. в отрицательном направлении оси X). Вириал этой силы равен $-\frac{1}{2}Fx = \frac{1}{2}mgx = \frac{1}{2}U$. По теореме вириала находим

$$\bar{K} = \frac{1}{2}\bar{U}.$$

§ 26. Абсолютно неупругий удар

1. Интересным примером, где имеет место потеря механической энергии под действием диссипативных сил, является *абсолютно неупругий удар*. Так называется столкновение двух тел, в результате которого они соединяются вместе и движутся дальше как одно тело. Примером может служить попадание ружейной пули в подвижную мишень, например в ящик с песком, подвешенный на веревках. Пуля, застряв в песке, остается в ящике и движется дальше вместе с ним. Шары из пластилина или глины при столкновении обычно слипаются и затем движутся вместе. Такое столкновение также может служить примером практически абсолютно неупругого удара. Точно так же столкновение двух свинцовых шаров можно с хорошим приближением рассматривать как абсолютно неупругий удар.

Физические явления при столкновении тел довольно сложны. Сталкивающиеся тела деформируются, возникают упругие силы и