Нерелятивистское приближение справедливо при

$$a \gg \frac{e^2}{m_0c^2} = 2{,}8 \cdot 10^{-13} \text{ см}.$$

5. При каких расстояниях a в задаче 3 квантовые поправки не играют роли?

Ответ. При $a \gg \frac{h^2}{2me^2} \approx 10^{-7}$ см.

6. Четыре электрона в состоянии покоя находятся в вершинах квадрата со стороной $a = 1$ см. После этого они начинают двигаться под действием взаимного отталкивания. Определить предельное значение их скоростей.

Ответ. $v = \sqrt{\left(2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{e^2}{ma}} = 2{,}6 \cdot 10^4$ см/с.

7. Материальная точка совершает одномерное финитное движение в потенциальном силовом поле между точками поворота x_A и x_B (см. рис. 45). Показать, что время движения ее от точки x_A к точке x_B равно времени обратного движения от точки x_B к точке x_A.

8. Материальная точка (например, шарик на пружине) под действием квазиупругой силы $F = -kx$ совершает колебания вдоль оси X вокруг положения равновесия. Пользуясь теоремой вириала, показать, что средние по времени значения кинетической и потенциальной энергий при таком колебании одинаковы.

9. Идеально упругий шарик движется вверх и вниз в однородном поле тяжести, отражаясь от пола по законам упругого удара. Найти связь между средними по времени значениями его кинетической $\bar{K}$ и потенциальной $\bar{U}$ энергий.

Решение. Поместим начало координат в одной из точек пола, направив ось X вертикально вверх. Тогда сила давления пола на шарик не будет влиять на величину вириала, так как она действует только в таких положениях шарика, когда $x = 0$. Надо учитывать только силу тяжести $F = -mg$ (минус потому, что сила F действует вниз, т. е. в отрицательном направлении оси X). Вириал этой силы равен $-\frac{1}{2}Fx = \frac{1}{2}mgx = \frac{1}{2}U$. По теореме вириала находим

$$\bar{K} = \frac{1}{2}\bar{U}.$$

§ 26. Абсолютно неупругий удар

1. Интересным примером, где имеет место потеря механической энергии под действием диссипативных сил, является *абсолютно неупругий удар*. Так называется столкновение двух тел, в результате которого они соединяются вместе и движутся дальше как одно тело. Примером может служить попадание ружейной пули в подвижную мишень, например в ящик с песком, подвешенный на веревках. Пуля, застряв в песке, остается в ящике и движется дальше вместе с ним. Шары из пластилина или глины при столкновении обычно слипаются и затем движутся вместе. Такое столкновение также может служить примером практически абсолютно неупругого удара. Точно так же столкновение двух свинцовых шаров можно с хорошим приближением рассматривать как абсолютно неупругий удар.

Физические явления при столкновении тел довольно сложны. Сталкивающиеся тела деформируются, возникают упругие силы и силы трения, в телах возбуждаются колебания и волны и т. д. Однако, если удар неупругий, то в конце концов все эти процессы прекращаются, и в дальнейшем оба тела, соединившись вместе, движутся как единое твердое тело. Его скорость можно найти, не вдаваясь в механизм явления, а используя только закон сохранения импульса.

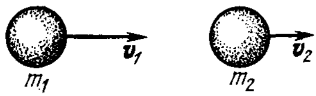

Рис. 47.

Рассмотрим абсолютно неупругий удар на примере столкновения шаров. Пусть шары движутся вдоль прямой, соединяющей их центры, со скоростями $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ (рис. 47). В этом случае говорят, что удар является *центральным*. Обозначим через $\boldsymbol{v}$ общую скорость шаров после столкновения. Закон сохранения импульса дает

$$m_1v_1+m_2v_2=(m_1+m_2)\,v,$$

где m_1 и m_2 — массы шаров. Отсюда получаем

$$v=\frac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2}. \tag{26.1}$$

Кинетические энергии системы до удара и после удара равны соответственно

$$K_1=\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2,\quad K_2=\frac{1}{2}(m_1+m_2)\,v^2.$$

Пользуясь этими выражениями, нетрудно получить

$$K_1-K_2=\frac{1}{2}\mu\,(v_1-v_2)^2, \tag{26.2}$$

где $\mu=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$ — приведенная масса шаров. Таким образом, *при столкновении двух абсолютно неупругих шаров происходит потеря кинетической энергии макроскопического движения, равная половине произведения приведенной массы на квадрат относительной скорости.*

2. Неупругое столкновение тел всегда должно сопровождаться *потерей* кинетической энергии макроскопического движения. Действительно, согласно теореме Кёнига, кинетическая энергия механической системы складывается из двух частей: 1) кинетической энергии движения системы как целого со скоростью ее центра масс; 2) кинетической энергии относительного движения материальных точек, на которые мысленно можно разбить систему, около ее центра масс. Обе части как кинетические энергии существенно положительны. Первая из них в результате столкновения тел не меняется в силу теоремы о движении центра масс. Вторая же после столкновения исчезает, так как в результате неупругого столкновения относительное движение частей системы прекращается, остается только общее движение их со скоростью центра масс. Поэтому столкновение приводит к уменьшению полной кинетической энергии макроскопического движения. Зато возрастает внутренняя энергия тела (см. следующий параграф).

3. Нетрудно понять, почему в формулу (26.2) вошли приведенная масса и относительная скорость сталкивающихся шаров. Согласно общей формуле (25.7) потеря кинетической энергии по абсолютной величине равна работе диссипатив-

ных сил, действующих в системе во время столкновения. При вычислении этой работы, как было показано в § 24, можно одно из сталкивающихся тел считать неподвижным, а второе — движущимся относительно него. Относительное движение двух материальных точек описывается уравнением $\mu\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}$, аналогичным второму закону Ньютона. Ввиду этого работа диссипативной силы $\boldsymbol{F}$ за все время столкновения равна $^1/_2\mu\,(v_1 - v_2)^2$. Эта величина и дает убыль кинетической энергии системы за то же время.

Когда сталкиваются два тела, то разрушительное действие при столкновении зависит только от их относительной скорости $v_1 - v_2$. Кинетическая энергия, от которой зависит разрушительный эффект, равна $^1/_2\mu\,(v_1 - v_2)^2$. Остальная часть кинетической энергии связана с движением центра масс системы. Эта энергия при столкновении не изменяется, а потому она на разрушение не оказывает никакого влияния. Например, если сталкиваются два одинаковых автомобиля, движущиеся навстречу друг другу с одной и той же скоростью v, то энергия, от которой зависит разрушение, равна

$$\frac{1}{2}\mu\,(v_1 - v_2)^2 = \frac{1}{2}\,\frac{mm}{m+m}\,(2v)^2 = mv^2,$$

т. е. вся кинетическая энергия тратится на разрушение. Это ясно без вычислений, так как после столкновения оба автомобиля, независимо от того, в какой мере они пострадали при аварии, должны остановиться. Тот же разрушительный эффект получится и в том случае, когда один из автомобилей неподвижен, а другой движется по направлению к нему со скоростью $2v$. Но в этом случае начальная кинетическая энергия системы составляет $^1/_2 m\,(2v)^2 = 2mv^2$, т. е. она вдвое больше. Только половина энергии идет на разрушение.

Разрушительные эффекты при авариях, конечно, являются бедствием. Но в некоторых случаях, например при изучении превращений, претерпеваемых атомными ядрами и элементарными частицами во время столкновения, они являются целью исследования. В таких случаях стремятся к тому, чтобы разрушительные эффекты усилить. Из изложенного следует, что этого можно добиться, приводя в движение обе сталкивающиеся частицы. *При одной и той же затрате энергии наибольшее разрушение получится тогда, когда центр масс сталкивающихся частиц в лабораторной системе отсчета неподвижен.* Этот принцип используется в так называемых *ускорителях на встречных пучках.* Современные ускорители представляют дорогие и сложные технические сооружения, применяющиеся для сообщения высоких энергий заряженным частицам — электронам, протонам и пр. Они используются в ядерной физике и физике элементарных частиц для исследования различных процессов, происходящих при столкновениях частиц высоких энергий. Обычно ускоренные частицы направляются на неподвижную мишень, при столкновении с которой и происходят процессы, подлежащие изучению. Тот же эффект, однако, может быть достигнут с меньшей затратой энергии, если привести в движение также саму мишень навстречу пучку. В качестве мишени используется встречный пучок ускоренных частиц. Если массы и скорости частиц в обоих пучках одинаковы, то согласно нерелятивистской механике должен получиться выигрыш в энергии в два раза. В действительности в ускорителях имеют дело с *релятивистскими пучками,* и при расчетах надо пользоваться релятивистской механикой. Оказывается, что в релятивистском случае можно получить принципиально ничем не ограниченный выигрыш в энергии, используя частицы, скорости которых приближаются к скорости света (см. т. IV).

4. Во время столкновения в системе действуют диссипативные силы, уменьшающие кинетическую энергию макроскопического движения. Поэтому применять закон сохранения энергии в его механической форме к процессам, происходящим во время удара, нельзя. Но после того как удар закончился и сталкивающиеся тела соединились в одно тело, законом сохранения энергии уже

можно пользоваться (если, конечно, в дальнейшем не действуют диссипативные силы).

В качестве примера рассмотрим задачу о *баллистическом маятнике*. Он применяется для измерения скорости пуль или снарядов. Баллистический маятник обычно представляет собой подвешенный большой ящик с песком или землей, который может колебаться вокруг горизонтальной оси. Пуля или снаряд, попадая в маятник, останавливается в нем, и маятник отклоняется. Для простоты расчета будем считать маятник математическим. Процесс столкновения происходит настолько быстро, что за время столкновения маятник не успевает отклониться на заметный угол. В результате удара он только приходит в движение, и задача прежде всего заключается в том, чтобы найти скорость этого движения v непосредственно после того, как удар закончился. До удара, когда маятник находился в равновесии, внешние силы (сила веса и сила натяжения подвеса), действующие на него, уравновешивались. Во время удара равновесие этих сил нарушается, а также появляются новые силы, например, силы трения. Однако во время самого удара все эти силы можно не принимать во внимание, так как их равнодействующая пренебрежимо мала по сравнению с силой, которая действует на маятник со стороны налетающих на него пули или снаряда. Иными словами, систему, состоящую из маятника и пули (снаряда) (рис. 48), во время удара можно считать замкнутой и применять к ней закон сохранения импульса. Из этого закона и найдется искомая скорость v, которую получит система непосредственно после удара:

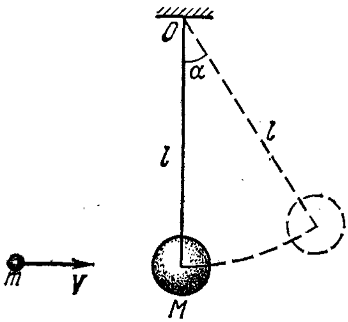

Рис. 48.

$$v = \frac{m}{M+m} V,$$

где V — скорость пули до удара. После того как удар закончился, действие (внутренних) диссипативных сил прекращается. Поэтому к процессам после удара применим закон сохранения энергии. Скорость v надо рассматривать как начальную скорость, с которой начнет колебаться маятник в нижнем положении. В этом положении маятник и пуля (снаряд) обладают кинетической энергией $^1/_2\,(M+m)\,v^2$, которая при отклонении маятника переходит в потенциальную энергию $(M+m)\,gh$. Отсюда находится высота поднятия:

$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{1}{2g}\left(\frac{m}{M+m}\right)^2 V^2. \tag{26.3}$$

Измерив высоту h, можно вычислить скорость пули V.

Было бы грубой ошибкой рассуждать следующим образом. В нижнем положении (до удара) энергия системы равна кинетической энергии пули $\frac{1}{2} mV^2$. При поднятии маятника эта энергия переходит в потенциальную энергию $(M+m)gh$. Такой способ рассуждения приводит к ошибочной формуле

$$h=\frac{1}{2g}\frac{m}{M+m}V^2.$$

Так как в случае баллистического маятника $m \ll M$, то эта формула дает совершенно неправильное (завышенное во много раз) значение для высоты h. Только в другом предельном случае, когда $m \gg M$, обе формулы фактически совпадают, как это ясно и без всяких вычислений. Ошибка приведенного рассуждения состоит в том, что оно не учитывает потери механической энергии при ударе.

При практических вычислениях удобно выразить высоту h через угол отклонения маятника из положения равновесия α, который легче поддается измерению, чем высота h. Очевидно $h = l(1-\cos\alpha) = 2l\sin^2(\alpha/2)$, где l — длина маятника. Пользуясь этим выражением, формулу (26.3) нетрудно привести к виду

$$V=2\frac{M+m}{m}\sqrt{gl}\sin\frac{\alpha}{2}\approx 2\frac{M}{m}\sqrt{gl}\sin\frac{\alpha}{2}. \qquad (26.4)$$

§ 27. Внутренняя энергия. Общефизический закон сохранения энергии

1. Потеря кинетической энергии без соответствующего увеличения потенциальной, о которой говорилось в предыдущем параграфе, происходит не только при неупругих ударах, но и во многих других процессах. Например, движения в замкнутой системе, где действуют силы трения, в конце концов прекращаются, так что запас кинетической энергии в системе уменьшается. Может происходить и потеря потенциальной энергии. Так, например, если растянуть пружину, перейдя при этом предел упругости, а затем предоставить ее самой себе, то она не возвращается в исходное состояние, в пружине сохраняется некоторое остаточное удлинение. При этом работа, которую в состоянии совершить растянутая пружина, меньше работы, затраченной на ее растяжение. Во всех подобных случаях наблюдаются потери механической энергии. Формальная макроскопическая механика объясняет эти потери тем, что энергия расходуется на работу против диссипативных сил, действующих в системе. Однако такое объяснение является чисто формальным и нефизическим, поскольку оно совсем не раскрывает физическую природу диссипативных сил.

2. Надо учесть, что всякий раз, когда наблюдается потеря механической энергии, в системе происходят какие-то внутренние изменения. Если, например, с помощью чувствительного термометра или термопары измерить температуру шаров до и после неупругого удара, то опыт покажет, что в результате удара шары немного нагрелись. То же самое происходит при трении и остаточной деформации. При продолжительном и интенсивном трении нагревание настолько сильное, что для его обнаружения не требуется никаких специальных приборов. Дикари добывали огонь трением одного куска дерева о другой. Если на ось мотора насадить диск из прочного картона (толщиной около 1 мм) и привести его в быстрое вращение, то можно перепилить деревянную доску, поднеся ее к краю этого вращаю-