§ 29. Силы и потенциальная энергия

1. *Взаимодействие тел можно описывать либо с помощью сил, либо с помощью потенциальной энергии как функции координат взаимодействующих частиц.* В макроскопической механике применимы оба способа. Первый способ обладает несколько большей общностью, так как он применим и к таким силам (например, силам трения), для которых нельзя ввести потенциальную энергию. Второй же способ применим только в случае консервативных сил. Но в квантовой механике, имеющей дело с явлениями микромира, диссипативных сил нет, и в ней для описания взаимодействия частиц применяется исключительно второй способ. В уравнения движения квантовой механики силы не входят, а входит лишь потенциальная энергия взаимодействующих частиц. Разумеется, в этом параграфе вопрос рассматривается только в рамках макроскопической механики.

2. Зная действующие силы как функции координат материальных точек системы, можно вычислить ее потенциальную энергию. Эта задача решается *интегрированием*. Простейшие примеры на такое вычисление были приведены в § 25. Можно поставить и обратную задачу: вычислить действующие силы по заданной потенциальной энергии как функции координат взаимодействующих материальных точек. Эта задача решается с помощью более простой математической операции — *дифференцирования*. Рассмотрим сначала отдельную материальную точку, находящуюся в силовом поле каких-то неподвижных тел. Если силы консервативные, то можно ввести потенциальную энергию U, которой обладает материальная точка в рассматриваемом силовом поле. Величина U будет функцией радиуса-вектора $\boldsymbol{r}$ этой точки или ее координат x, y, z. Пусть точка претерпела произвольное бесконечно малое перемещение $d\boldsymbol{r}$. Если $\boldsymbol{F}$ — сила, действующая на нее, то работа этой силы при таком перемещении будет равна убыли потенциальной энергии:

$$\boldsymbol{F}\,d\boldsymbol{r} = -dU. \tag{29.1}$$

Это равенство справедливо, каково бы ни было перемещение $d\boldsymbol{r}$. Поэтому, если функция $U(\boldsymbol{r})$ известна, то оно полностью определяет силу $\boldsymbol{F}$ по величине и направлению. В самом деле, чтобы найти вектор $\boldsymbol{F}$, достаточно определить его проекции F_x, F_y, F_z на координатные оси прямоугольной системы координат. В этих проекциях уравнение (29.1) запишется так:

$$F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz = -dU. \tag{29.2}$$

Допустим, что смещение происходит вдоль какой-либо одной координатной оси, например оси X. Тогда

$$F_x dx = -[dU]_{y,\,z},$$

и, следовательно,

$$F_x = -\left(\frac{dU}{dx}\right)_{y,\ z}.$$

Индексы y, z означают, что при смещении, а следовательно, и при дифференцировании координаты y и z должны оставаться постоянными. Иными словами, $U(x,\ y,\ z)$ при дифференцировании должна рассматриваться как функция одного аргумента x; остальные два аргумента, y и z, являются *параметрами*, которые при дифференцировании по x должны оставаться постоянными. Величины, получающиеся в результате такого дифференцирования, называются *частными производными* функции U. Они обозначаются символом ∂, в отличие от символа d, применяемого при дифференцировании функций одного независимого переменного. Аналогичные соображения справедливы и для проекций силы вдоль остальных двух осей Y и Z. Таким образом,

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}. \tag{29.3}$$

Если функция $U(x,\ y,\ z)$ известна, то нахождение составляющих F_x, F_y, F_z сводится к вычислению ее частных производных по координатам. Разумеется, формулы (29.3) относятся только к случаю консервативных сил.

Приведем пример. Измеряя потенциальную энергию растянутой спиральной пружины, нашли, что она определяется выражением $U = {}^1/_2\, kx^2$, где x — удлинение пружины, а k — постоянная. Направим ось X вдоль оси пружины, закрепив один конец ее, а другой будем удерживать рукой. Тогда U будет функцией только одной координаты x. Растянутая пружина действует на руку с силой

$$F = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}kx^2\right) = -kx.$$

Знак минус указывает, что сила F направлена в сторону, противоположную смещению, т. е. является *силой притяжения*.

3. Три формулы (29.3) можно объединить в одну векторную формулу. С этой целью умножим эти формулы на единичные векторы координатных осей $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ и сложим. В результате получим

$$\boldsymbol{F} = -\operatorname{grad} U, \tag{29.4}$$

где символом $\operatorname{grad} U$ обозначена сумма

$$\operatorname{grad} U \equiv \frac{\partial U}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\boldsymbol{k}. \tag{29.5}$$

Она, согласно соотношению (29.4), является вектором. Вектор, определяемый соотношением (29.5), называется *градиентом скаляра* U. Для него, наряду с обозначением $\operatorname{grad} U$, применяется также обозначение ∇U. Здесь ∇ («набла») означает символический вектор или *оператор*

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}, \tag{29.6}$$

называемый *оператором Гамильтона* (1805—1865) или набла-оператором. Таким образом, ∇U формально может рассматриваться как произведение символического вектора ∇ на скаляр U. Понятно, что можно говорить о градиенте не только функции U, но и любой скалярной функции координат. Понятие градиента широко применяется в самых разнообразных вопросах физики и математики.

Для уяснения геометрического смысла градиента полезно ввести *поверхности уровня,* т. е. такие поверхности, на которых скаляр U остается постоянным. Пусть S — одна из таких поверхностей и пусть она проходит через точку пространства *1*, в которой ищется grad U (рис. 55). Поместим в этой точке начало координат. Ось X направим по нормали к поверхности уровня $U = \text{const}$, проведя единичный вектор $\boldsymbol{i}$ в сторону возрастания U. Координатные оси Y и Z расположатся в плоскости, касательной к поверхности уровня $U = \text{const}$. Ясно, что при таком выборе координатных осей частные производные $\frac{\partial U}{\partial y}$ и $\frac{\partial U}{\partial z}$ в рассматриваемой точке пространства обратятся в нуль, так что в формуле (29.5) останется одно только первое слагаемое: $\operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial x}\boldsymbol{i}$. Изменим теперь обозначения. Единичный вектор нормали к поверхности уровня $U = \text{const}$ обозначим символом $\boldsymbol{n}$, а расстояние между двумя бесконечно близкими поверхностями уровня U и $U + dU$, измеренное вдоль нормали, т. е. расстояние между точками *1* и *2*, — символом dn. Тогда очевидно $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{dU}{dn}$. Эту величину чаще обозначают посредством $\frac{\partial U}{\partial n}$ и называют *производной скаляра U в направлении нормали к поверхности уровня.* В этом направлении величина U, очевидно, изменяется наиболее быстро. Таким образом, в новых обозначениях формула (29.5) примет вид

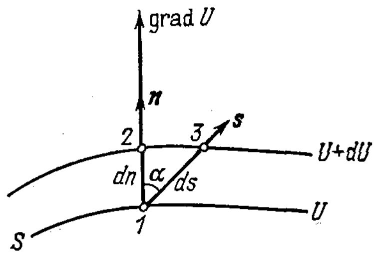

Рис. 55.

$$\operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial n}\boldsymbol{n}. \tag{29.7}$$

Отсюда видно, что *градиент функции U есть вектор, направленный по нормали к поверхности уровня $U = \text{const}$ в сторону возрастания U; его длина численно равна производной по нормали функции U к той же поверхности.* Преимущество такого определения по сравнению с определением (29.5) состоит в том, что оно *инвариантно,* т. е. содержит только величины и понятия, имеющие непосредственный геометрический смысл, и не содержит ничего такого, что вносится случайным выбором координатной системы.

Отметим еще одну простую, но важную формулу. Проведем через точку *1* (см. рис. 55) отрезок прямой *13* под углом α к нормали n. Точку *3* возьмем на поверхности уровня $U+dU$. Длину этого отрезка обозначим ds. Так как точка *3* лежит на той же поверхности уровня, что и точка *2*, то приращения функции U на отрезках *12* и *13* будут одни и те же. Так как сами отрезки бесконечно малы, то участки поверхностей уровня, через которые они проходят, могут считаться плоскими, а потому $ds=\frac{dn}{\cos\alpha}$. На этом основании

$$\frac{dU}{ds}=\frac{dU}{dn}\cos\alpha,$$

или в иных обозначениях

$$\frac{\partial U}{\partial s}=\frac{\partial U}{\partial n}\cos\alpha=\frac{\partial U}{\partial n}(\boldsymbol{ns}),$$

где $\boldsymbol{s}$ — единичный вектор в направлении отрезка *13*. Величина $\frac{\partial U}{\partial s}$ называется производной функции U в том же направлении. Учтя определение градиента (29.7), получим

$$\frac{\partial U}{\partial s}=(\boldsymbol{s}\operatorname{grad}U). \tag{29.8}$$

Формула эта справедлива независимо от конкретного смысла функции U. Если U является потенциальной энергией материальной точки, то с учетом (29.4) формула принимает вид

$$\frac{\partial U}{\partial s}=-(\boldsymbol{Fs}),$$

или

$$F_s=-\frac{\partial U}{\partial s}, \tag{29.9}$$

что, конечно, легко получить и прямо из (29.1).

4. Формулы (29.3) тривиальным образом обобщаются на случай произвольной системы материальных точек с одними только консервативными силами. В этом случае потенциальная энергия U является функцией координат всех взаимодействующих точек. Вместо (29.3) следует писать

$$F_{ix}=-\frac{\partial U}{\partial x_i},\quad F_{iy}=-\frac{\partial U}{\partial y_i},\quad F_{iz}=-\frac{\partial U}{\partial z_i}. \tag{29.10}$$

Здесь x_i, y_i, z_i — координаты i-й материальной точки системы, а F_{ix}, F_{iy}, F_{iz} — компоненты действующей на нее силы. Номер i может пробегать все возможные значения, так что формулы (29.10) справедливы для каждой точки системы.

5. Закон сохранения энергии в механике является следствием уравнения движения Ньютона. Можно ли наоборот вывести уравнение движения Ньютона из механического закона сохранения энергии? На этот вопрос следует ответить отрицательно. Уравнение, выражающее сохранение энергии, является *скалярным,* в то время как уравнение движения есть *векторное* и эквивалентно *трем* независимым *числовым уравнениям.* Ясно, что одного скалярного уравнения недостаточно для вывода из него трех независимых числовых уравнений. Но если движение одномерное, то при некоторых дополнительных предположениях из закона сохранения энергии можно вывести уравнение движения Ньютона. Допустим, что материальная точка движется вдоль какой-то фиксированной линии под действием одних только консервативных сил. По закону сохранения энергии ${}^1/{}_2mv^2 + U = \mathrm{const}$. Потенциальная энергия U при таком движении может рассматриваться как функция только расстояния s, измеренного вдоль траектории. Дифференцируя последнее соотношение по времени, получим

$$m v\dot{v} + \frac{dU}{ds}\dot{s} = 0,$$

или, учитывая соотношения $v = \dot{s}$ и $F_s = -\dfrac{dU}{ds}$,

$$v\,(m\dot{v} - F_s) = 0. \tag{29.11}$$

Отсюда после сокращения на v получается уравнение движения Ньютона.

Необходимо, однако, отметить, что уравнение Ньютона в механике обладает большей общностью, чем закон сохранения энергии. Во-первых, приведенный вывод справедлив только для консервативных сил. Во-вторых, при выводе в уравнении (29.11) производилось сокращение на v. Поэтому необходимо ввести *дополнительное предположение,* не содержащееся в самом законе сохранения энергии, что $v \neq 0$. Уравнение (29.11) имеет два решения, которые оба удовлетворяют условию сохранения энергии. Одно из них, а именно $v = 0$, было отброшено. Закон сохранения энергии для этого не дает оснований. Однако решение $v = 0$ не согласуется с уравнением Ньютона, если только сила F не обращается в нуль.

6. Используя понятие потенциальной энергии, можно выразить *условие равновесия* механической системы и его *устойчивости.* Рассмотрим сначала систему взаимодействующих материальных точек, на которую не наложены никакие связи. Пусть все действующие силы консервативны. Тогда их составляющие можно представить формулами (29.10). В состоянии равновесия все силы, а с ними и все первые производные потенциальной энергии U по координатам должны обращаться в нуль. Отсюда следует, что *для равновесия необходимо, чтобы потенциальная энергия была стационарна.* Стационарность означает, что при всяком выводе системы из состояния равновесия, когда координаты материальных точек получают бесконечно малые приращения δx_1, δy_1, ..., δz_n, функция U остается почти постоянной. Точнее, приращения функции U при таких бесконечно малых изменениях координат являются бесконечно малыми *более высокого порядка*, чем приращения самих координат. В частности, *система будет находиться в равновесии, если потенциальная энергия U экстремальна, т. е. минимальна или максимальна.*

Если потенциальная энергия минимальна, то равновесие будет устойчивым. Действительно, пусть U_0 — значение потенциальной энергии в состоянии равновесия. По условию теоремы можно найти малую окрестность вблизи состояния равновесия, в которой разность $U - U_0$ положительна. Выберем эту окрестность так, чтобы было $0 < U - U_0 < \varepsilon$, где ε — некоторое положительное число, которое может быть взято сколь угодно малым. Выведем теперь систему из состояния равновесия, сообщив ей кинетическую энергию $K_0 < \varepsilon$. Затем предоставим систему самой себе. Свободное движение системы будет подчиняться закону сохранения энергии $K + U = K_0 + U_0$ или $U - U_0 = K_0 - K$. Отсюда видно, что $U - U_0 < \varepsilon$, так как кинетическая энергия K не может быть отрицательной. Следовательно, система без внешних воздействий не может выйти за пределы области $0 < U - U_0 < \varepsilon$ и будет совершать в ней финитное движение. Это означает, что равновесие системы при минимуме потенциальной энергии *устойчиво*, точнее, *устойчиво по отношению к бесконечно малым возмущениям.*

Изложенное остается справедливым и при наличии диссипативных сил типа жидкого трения, а также гироскопических сил. Действительно, в состоянии равновесия, когда все материальные точки покоятся, такие силы равны нулю. Поэтому необходимое условие равновесия, требующее стационарности потенциальной энергии U, остается в силе. Сохраняет силу и доказательство устойчивости равновесия при минимуме U. Только равенство, выражающее закон сохранения энергии, при наличии диссипативных сил в доказательстве следует заметить неравенством $(K + U) - (K_0 + U_0) < 0$ или $U - U_0 < K_0 - K$. Это только усилит дальнейшие заключения. *Диссипативные силы делают равновесие еще более устойчивым.* Если систему вывести из состояния равновесия и затем предоставить самой себе, то диссипативные силы в конце концов снова вернут систему в состояние равновесия.

Причина устойчивости равновесия при минимуме U выявится особенно наглядно, если рассмотреть всего одну материальную точку, могущую совершать одномерное движение. В этом случае график функции U имеет вид потенциальной ямы (аналогичной той, которая представлена на рис. 45). В состоянии равновесия материальная точка «лежит на дне потенциальной ямы». Никакие силы на нее в этом положении не действуют. При смещении точки в сторону, как легко видеть, появляется сила, направленная к положению равновесия и стремящаяся вернуть точку в это положение. Если же точка находится в равновесии там, где потенциальная энергия максимальна (т. е. «лежит на вершине потенциальной горы», например в точке N на рис. 44), то при ее смещении в сторону появляется сила, направленная от положения равновесия. Такая сила еще дальше уведет точку от этого положения. Равновесие будет неустойчивым. *Равновесие всякой механической системы, вообще говоря, неустойчиво, если потенциальная энергия максимальна.*

Изложенные результаты можно распространить и на системы, свобода перемещения которых ограничена *наложенными связями*. Надо только потребовать, чтобы связи были *идеальными,* т. е. такими, которые не производят работы при любых возможных перемещениях системы. Примером может служить идеально гладкий шарик, надетый на идеально твердую и гладкую спицу, которая задает направление возможного перемещения шарика. Сила, действующая на шарик со стороны спицы, перпендикулярна к направлению возможного перемещения и работы не производит.

При наличии связей условия равновесия материальной точки принимают вид

$$-\frac{\partial U}{\partial x}+R_x=0, \qquad -\frac{\partial U}{\partial y}+R_y=0, \qquad -\frac{\partial U}{\partial z}+R_z=0, \qquad (29.12)$$

где $\boldsymbol{R}$ — *реакция связей,* т. е. сила, с которой связи действуют на рассматриваемую материальную точку. В целях краткости мы провели рассуждения для одной материальной точки. В случае системы изменится только число уравнений, но сами рассуждения останутся без изменений. Пусть δx, δy, δz — *возможные перемещения* материальной точки вдоль координатных осей. Умножая на них уравнения (29.12), складывая и принимая во внимание, что реакции связей работы не производят, получим $\delta U \equiv \frac{\partial U}{\partial x}\delta x+\frac{\partial U}{\partial y}\delta y+\frac{\partial U}{\partial z}\delta z=0.$ Таково необходимое условие равновесия. Оно означает, что *в состоянии равновесия потенциальная энергия U стационарна.* Не изменятся и рассуждения относительно устойчивости равновесия, которые были приведены выше. Иллюстрацией может служить тяжелый шарик, помещенный на дно сферической чаши (устойчивое равновесие), или в вершину выпуклой поверхности (неустойчивое равновесие). *При наличии сил сухого трения стационарность потенциальной энергии U для равновесия не необходима.* Примером может служить равновесие бруска, лежащего на наклонной плоскости.