ГЛАВА V

МОМЕНТ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ

* *

§ 30. Момент силы и момент импульса относительно неподвижного начала

1. Важные законы механики связаны с понятиями *момента импульса* и *момента силы*. Следует различать и никоим образом не смешивать друг с другом моменты этих векторов *относительно точки* и *относительно оси*. Момент вектора относительно точки и относительно оси — разные понятия, хотя и связанные между собой. Момент вектора относительно точки сам есть *вектор*. Момент того же вектора относительно оси есть *проекция* на эту ось его момента относительно точки, лежащей на той же оси. Таким образом, момент вектора относительно оси уже не является вектором. Начнем с рассмотрения моментов относительно точки.

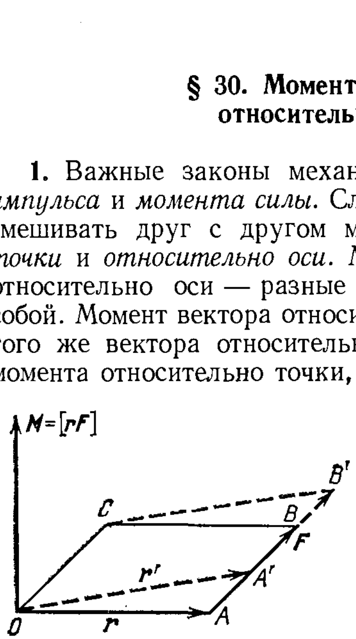

Рис. 56.

Пусть O — какая-либо точка, относительно которой рассматривается момент вектора силы или вектора импульса. Ее называют *началом* или *полюсом*. Обозначим буквой $\boldsymbol{r}$ радиус-вектор, проведенный из этой точки к точке приложения силы $\boldsymbol{F}$ (рис. 56). *Моментом силы* $\boldsymbol{F}$ *относительно точки* O называется векторное произведение радиуса-вектора $\boldsymbol{r}$ на силу $\boldsymbol{F}$:

$$\boldsymbol{M}=[\boldsymbol{rF}]. \tag{30.1}$$

Из этого определения непосредственно следует, что *момент* $\boldsymbol{M}$ *не изменится, если точку приложения силы* $\boldsymbol{F}$ *перенести в любую другую точку, расположенную на линии действия силы.* Действительно, если точку приложения силы перенести из A в A', то параллелограмм $OABC$ перейдет в параллелограмм $OA'B'C$. Оба параллелограмма имеют общее основание OC и общую высоту. Поэтому их площади равны, что и доказывает наше утверждение.

Если $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2$, то на основании известного свойства векторного произведения можно написать

$$[\boldsymbol{rF}]=[\boldsymbol{rF}_1]+[\boldsymbol{rF}_2]. \tag{30.2}$$

Это значит, что *момент равнодействующей двух или нескольких сил относительно некоторого начала равен геометрической сумме моментов составляющих сил относительно того же начала.*

Аналогично определяется момент импульса $\boldsymbol{p}$ материальной точки относительно полюса O. Так называется векторное произведение

$$\boldsymbol{L} = [\boldsymbol{r}\boldsymbol{p}]. \tag{30.3}$$

2. Целесообразность введения этих двух понятий оправдывается тем, что моменты импульса и силы связаны между собой важным соотношением, которое мы сейчас выведем из уравнений Ньютона. Предположим сначала, что начало O неподвижно. Дифференцируя выражение (30.3) по времени, получим

$$\dot{\boldsymbol{L}} = [\dot{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{p}] + [\boldsymbol{r}\dot{\boldsymbol{p}}].$$

Так как по предположению начало O неподвижно, то производная $\dot{\boldsymbol{r}}$ есть скорость материальной точки, связанная с ее импульсом соотношением $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$. Поэтому первое слагаемое равно нулю как векторное произведение коллинеарных векторов $\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$. Второе слагаемое можно преобразовать с помощью уравнения Ньютона $\dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{F}$. Тогда получится $\dot{\boldsymbol{L}} = [\boldsymbol{r}\boldsymbol{F}]$, или

$$\dot{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{M}. \tag{30.4}$$

Это соотношение мы и хотели получить. Оно называется *уравнением моментов: производная по времени момента импульса материальной точки относительно неподвижного начала равна моменту действующей силы относительно того же начала.* При выводе не предполагалось, что масса m остается постоянной. Поэтому уравнение (30.4) справедливо также и в релятивистской механике, т. е. при сколь угодно больших скоростях материальной точки, допускаемых теорией относительности.

Уравнение моментов (30.4) можно обобщить на случай произвольной системы материальных точек. *Моментом импульса системы материальных точек относительно некоторого начала* называется векторная сумма моментов импульсов всех материальных точек системы относительно того же начала. Аналогично *момент всех сил, действующих на систему материальных точек,* определяется как векторная сумма моментов отдельных сил. Вместо того, чтобы складывать моменты всех сил, можно, имея в виду соотношение (30.2), сначала найти равнодействующую этих сил, а затем вычислить ее момент. Так же можно поступать и при нахождении импульса системы материальных точек: сначала векторно сложить импульсы всех материальных точек, а затем найти момент полученного вектора относительно рассматриваемой точки.

Предполагая начало неподвижным, напишем уравнение моментов для каждой материальной точки, а затем векторно сложим их.

Тогда мы снова придем к соотношению (30.4), но уже для системы материальных точек. Как ясно из вывода, под $\boldsymbol{M}$ следует понимать момент всех сил, как внешних, так и внутренних. Однако внутренние силы можно не принимать во внимание, так как их полный момент относительно любого начала равен нулю. Это объясняется тем, что внутренние силы всегда входят попарно: силе F_{ik}, с которой k-я точка действует на i-ю, соответствует равная и противоположно направленная сила F_{ki}, с которой i-я точка действует на k-ю. Эти две силы направлены вдоль одной прямой. При вычислении моментов точки их приложения можно перенести в одну и ту же точку на этой прямой. Тогда силы взаимно уничтожатся, а их полный момент будет равен нулю.

Таким образом, третий закон Ньютона позволяет исключить из уравнения (30.4) внутренние силы. Вместо уравнения (30.4) получается более сильный результат:

$$\dot{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{M}_{\text{внеш}}, \tag{30.5}$$

т. е. *производная по времени от момента импульса системы материальных точек относительно произвольного неподвижного начала равна геометрической сумме моментов всех внешних сил относительно того же начала.*

3. *Если момент внешних сил относительно неподвижного начала O равен нулю, то момент импульса системы относительно того же начала остается постоянным во времени.* Это положение называется *законом сохранения момента импульса.* В частности, момент импульса сохраняется для изолированной системы материальных точек.

Важным является случай центральных сил, когда направления всех сил, действующих на материальные точки системы, проходят через неподвижный центр O. Момент таких сил относительно точки O равен нулю. Поэтому момент импульса системы относительно точки O должен сохраняться, т. е. оставаться постоянным во времени. И это справедливо даже тогда, когда силы зависят от скоростей.

Наряду с законами сохранения импульса и энергии закон сохранения момента импульса является одним из важнейших *фундаментальных законов физики.* В атомной физике понятие момента импульса должно быть обобщено. Это видно уже из того, что в классической механике момент импульса определен через координаты и скорости частиц, а эти величины, согласно принципу неопределенностей Гайзенберга, одновременно не могут иметь определенных значений в одном и том же состоянии. Кроме того, моментом импульса могут обладать не только частицы, но и силовые поля, например электромагнитное поле. Наконец, понятия и законы классической механики не всегда применимы к процессам, происходящим внутри атомов, атомных ядер и элементарных частиц. При рассмотрении таких процессов не представляется возможным пользоваться классическими понятиями, к числу которых относится момент импульса как он был определен выше. Здесь можно только ограничиться замечанием, что в физике понятие момента импульса расширяется, но ка́к это делается фактически, пока рассматривать преждевременно. Изучающий физику уже с самого начала должен иметь в виду, что физика обобщает механическое понятие момента импульса и постулирует закон его сохранения для всех физических процессов. Такой *расширенный закон сохранения момента импульса уже не является теоремой механики, а должен рассматриваться как самостоятельный общефизический принцип, являющийся обобщением опытных фактов.*

Можно было бы при изложении механики включить закон сохранения момента импульса для системы двух материальных точек в число основных постулатов, как это мы сделали с законом сохранения импульса для системы двух материальных точек. Тогда третий закон Ньютона следовало бы исключить из числа основных постулатов механики. В § 12 уже было показано, что этот закон только отчасти является следствием закона сохранения импульса. Однако, если к закону сохранения импульса добавить еще закон сохранения его момента, то из этих двух законов можно получить третий закон Ньютона как их следствие. Действительно, рассмотрим замкнутую систему из двух материальных точек, взаимодействующих между собой с силами $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$. Из закона сохранения импульса следует $\boldsymbol{F}_1 = -\boldsymbol{F}_2$, а из закона сохранения момента импульса:

$$[\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{p}_1] + [\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{p}_2] = \text{const}.$$

Дифференцируя по времени это уравнение, получим

$$[\boldsymbol{r}_1\dot{\boldsymbol{p}}_1] + [\boldsymbol{r}_2\dot{\boldsymbol{p}}_2] = 0,$$

или

$$[\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{F}_1] + [\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{F}_2] = 0.$$

Так как $\boldsymbol{F}_1 = -\boldsymbol{F}_2$, то

$$[(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)\,\boldsymbol{F}_1] = 0.$$

Отсюда следует, что векторы $\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$ и $\boldsymbol{F}_1$ коллинеарны. Коллинеарны также векторы $\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$ и $\boldsymbol{F}_2$. Это значит, что силы $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$ направлены вдоль прямой, соединяющей взаимодействующие материальные точки.

4. Момент сил и момент импульса зависят не только от величины и направления этих векторов, но и от положения начала. Оба момента, вообще говоря, изменятся, если перейти к новому началу. Пусть O и O' — два неподвижных начала. Радиусы-векторы $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{r}'$ одной и той же точки относительно этих начал связаны соотношением

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' - \boldsymbol{R},$$

где $\boldsymbol{R}=\overrightarrow{O'O}$ — радиус-вектор начала O относительно O'. Написав выражения для моментов импульсов каждой материальной точки системы и просуммировав эти выражения по всем материальным точкам, получим

$$\sum[\boldsymbol{r}m\boldsymbol{v}]=\sum[\boldsymbol{r}'m\boldsymbol{v}]-[\boldsymbol{R}\sum m\boldsymbol{v}],$$

или

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{L}'-[\boldsymbol{R}\boldsymbol{p}], \tag{30.6}$$

где $\boldsymbol{p}$ — полный импульс системы, $\boldsymbol{L}$ и $\boldsymbol{L}'$ — моменты ее импульса относительно начал O и O' соответственно. Если импульс $\boldsymbol{p}$ равен нулю, то $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{L}'$. В этом случае вектор момента импульса системы не зависит от выбора начала.

Аналогично,

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{M}'-[\boldsymbol{R}\boldsymbol{F}], \tag{30.7}$$

где $\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{M}'$ — моменты сил, действующих на систему, относительно начал O и O', а $\boldsymbol{F}$ — геометрическая сумма этих сил. Если результирующая сила $\boldsymbol{F}$ равна нулю, то $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{M}'$. Это имеет место, например, для *пары сил*, т. е. двух равных, но противоположно направленных сил, линии действия которых смещены одна относительно другой. Вот почему можно говорить о моменте пары сил, не указывая начала, относительно которого этот момент берется.

§ 31. Связь момента импульса материальной точки с секториальной скоростью. Теорема площадей

1. Если система состоит из одной материальной точки, то момент импульса имеет простой геометрический смысл. Пусть в момент времени t положение материальной точки определяется радиусом-вектором $\boldsymbol{r}$ (рис. 57). За время dt радиус-вектор получает приращение $\boldsymbol{v}dt$, описывая площадь бесконечно малого треугольника, заштрихованного на рис. 57. Площадь этого треугольника можно изобразить вектором

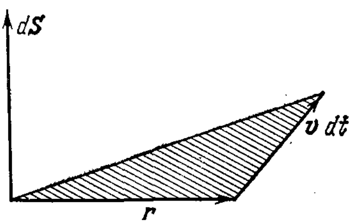

Рис. 57.

$$d\boldsymbol{S}=\frac{1}{2}[\boldsymbol{r}\boldsymbol{v}]\,dt,$$

длина которого представляет величину рассматриваемой площади, а направление перпендикулярно к плоскости треугольника. Производная

$$\dot{\boldsymbol{S}}=\frac{d\boldsymbol{S}}{dt}=\frac{1}{2}[\boldsymbol{r}\boldsymbol{v}] \tag{31.1}$$

определяет площадь, описываемую радиусом-вектором в единицу времени. Она называется *секториальной* скоростью. Так как по