где $\boldsymbol{R} = \overrightarrow{O'O}$ — радиус-вектор начала O относительно O'. Написав выражения для моментов импульсов каждой материальной точки системы и просуммировав эти выражения по всем материальным точкам, получим

$$\sum [\boldsymbol{r}m\boldsymbol{v}] = \sum [\boldsymbol{r}'m\boldsymbol{v}] - [\boldsymbol{R}\sum m\boldsymbol{v}],$$

или

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}' - [\boldsymbol{R}\boldsymbol{p}], \tag{30.6}$$

где $\boldsymbol{p}$ — полный импульс системы, $\boldsymbol{L}$ и $\boldsymbol{L}'$ — моменты ее импульса относительно начал O и O' соответственно. Если импульс $\boldsymbol{p}$ равен нулю, то $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}'$. В этом случае вектор момента импульса системы не зависит от выбора начала.

Аналогично,

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}' - [\boldsymbol{R}\boldsymbol{F}], \tag{30.7}$$

где $\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{M}'$ — моменты сил, действующих на систему, относительно начал O и O', а $\boldsymbol{F}$ — геометрическая сумма этих сил. Если результирующая сила $\boldsymbol{F}$ равна нулю, то $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}'$. Это имеет место, например, для *пары сил*, т. е. двух равных, но противоположно направленных сил, линии действия которых смещены одна относительно другой. Вот почему можно говорить о моменте пары сил, не указывая начала, относительно которого этот момент берется.

§ 31. Связь момента импульса материальной точки с секториальной скоростью. Теорема площадей

1. Если система состоит из одной материальной точки, то момент импульса имеет простой геометрический смысл. Пусть в момент времени t положение материальной точки определяется радиусом-вектором $\boldsymbol{r}$ (рис. 57). За время dt радиус-вектор получает приращение $\boldsymbol{v}dt$, описывая площадь бесконечно малого треугольника, заштрихованного на рис. 57. Площадь этого треугольника можно изобразить вектором

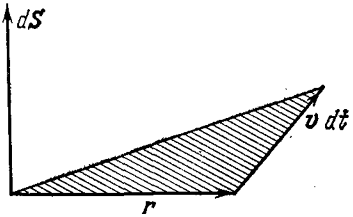

Рис. 57.

$$d\boldsymbol{S} = \frac{1}{2}[\boldsymbol{r}\boldsymbol{v}]\,dt,$$

длина которого представляет величину рассматриваемой площади, а направление перпендикулярно к плоскости треугольника. Производная

$$\dot{\boldsymbol{S}} = \frac{d\boldsymbol{S}}{dt} = \frac{1}{2}[\boldsymbol{r}\boldsymbol{v}] \tag{31.1}$$

определяет площадь, описываемую радиусом-вектором в единицу времени. Она называется *секториальной* скоростью. Так как по определению $L=m[rv]$, то

$$L=2m\dot{S}. \tag{31.2}$$

При нерелятивистских движениях масса m постоянна, а потому момент импульса L пропорционален секториальной скорости $\dot{S}$.

2. Если сила, действующая на материальную точку, центральная и ее направление проходит через полюс O, то вектор L не будет меняться во времени. В случае нерелятивистских движений не будет меняться и секториальная скорость $\dot{S}$. В этом случае закон сохранения момента импульса переходит в *закон площадей:*

$$\dot{S}=\text{const}. \tag{31.3}$$

Из этого уравнения вытекают два следствия. Во-первых, плоскость, в которой лежат векторы r и v, перпендикулярны к направлению вектора $\dot{S}$. А так как последнее направление остается неизменным, то будет неизменной и указанная плоскость. Это значит, что *траектория материальной точки в поле центральных сил есть плоская кривая.* Во-вторых, из постоянства длины вектора $\dot{S}$ следует, что в *равные времена радиус-вектор материальной точки описывает одинаковые по величине площади.* Это положение часто также называют *законом площадей.* Мы предпочитаем, однако, придавать закону площадей более широкий смысл, характеризуя площадь не только величиной, но и ее ориентацией в пространстве.

Справедливо и обратное утверждение. *Если траектория материальной точки — плоская кривая и радиус-вектор, проведенный из неподвижного полюса O, в равные времена описывает одинаковые площади, то направление действующей силы все время проходит через полюс O.* Действительно, условие теоремы эквивалентно утверждению, что секториальная скорость $\dot{S}$ есть постоянный вектор. Будет постоянен и момент импульса L. Поэтому (см. (30.4)) $\dot{L}=M=[rF]=0$. Отсюда следует, что вектор F коллинеарен радиусу-вектору r, а следовательно, его направление все время проходит через точку O. Последняя является, таким образом, *силовым центром*, из которого должны исходить силы притяжения или отталкивания, действующие на материальную точку.

3. Теорема площадей справедлива не только в случае неподвижного силового центра. Пусть две материальные точки взаимодействуют между собой центральными силами. Применяя понятие приведенной массы, можно свести задачу об их относительном движении к задаче о движении одной точки в силовом поле неподвижного силового центра (см. § 20). В качестве такого силового центра можно принять любую из рассматриваемых материальных точек, относительно которой движется другая точка. Тогда радиус-вектор, проведенный от первой точки ко второй, будет в относительном движении описывать в равные времена равные площади.