§ 32. Момент импульса и момент сил относительно неподвижной оси

1. Векторное уравнение (30.5) эквивалентно трем скалярным уравнениям:

$$\frac{dL_x}{dt}=M_x^{\text{внеш}},\quad \frac{dL_y}{dt}=M_y^{\text{внеш}},\quad \frac{dL_z}{dt}=M_z^{\text{внеш}},\tag{32.1}$$

которые получаются из уравнения (30.5) путем проектирования на неподвижные оси декартовой системы координат. Индекс «внеш», указывающий на то, что при вычислении момента сил внутренние силы могут не приниматься во внимание, в дальнейшем обычно будет опускаться. Таким образом, под $\boldsymbol{M}$ в уравнении моментов всегда будет подразумеваться момент внешних сил. Величины L_x и M_x называются соответственно *моментами импульса* и *сил относительно оси* X. Аналогично говорят о моментах импульса и сил относительно координатных осей Y и Z.

Вообще, *моментами* L_x *и* M_x *импульса и сил относительно произвольной оси* X называют проекции векторов $\boldsymbol{L}$ и $\boldsymbol{M}$ на эту ось в предположении, что начало O лежит на рассматриваемой оси.

Уравнение

$$\frac{dL_x}{dt}=M_x\tag{32.2}$$

называется *уравнением моментов относительно неподвижной оси* X. Когда момент внешних сил относительно какой-либо неподвижной оси равен нулю, то момент импульса системы относительно той же оси остается постоянным. Это — *закон сохранения момента импульса относительно неподвижной оси*.

2. Чтобы выяснить геометрический смысл момента M_x, представим векторы $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{F}$ в виде

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_\perp+\boldsymbol{r}_\parallel,\quad \boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_\perp+\boldsymbol{F}_\parallel.$$

Здесь $\boldsymbol{r}_\perp$ — составляющая вектора $\boldsymbol{r}$, перпендикулярная к оси X, а $\boldsymbol{r}_\parallel$ — составляющая того же вектора, параллельная этой оси. Аналогичный смысл имеют векторы $\boldsymbol{F}_\perp$ и $\boldsymbol{F}_\parallel$. Используя эти разложения, можно написать

$$\boldsymbol{M}=[\boldsymbol{r}\boldsymbol{F}]=[\boldsymbol{r}_\perp\boldsymbol{F}_\perp]+\{[\boldsymbol{r}_\perp\boldsymbol{F}_\parallel]+[\boldsymbol{r}_\parallel\boldsymbol{F}_\perp]\}+[\boldsymbol{r}_\parallel\boldsymbol{F}_\parallel].$$

Последний член как векторное произведение параллельных векторов равен нулю. Сумма, заключенная в фигурные скобки, есть вектор, перпендикулярный к оси X. При проектировании на эту ось он даст нуль. Таким образом, составляющая вектора $\boldsymbol{M}$, параллельная оси X, равна

$$\boldsymbol{M}_\parallel=[\boldsymbol{r}_\perp\boldsymbol{F}_\perp].$$

Только эта составляющая и играет роль при нахождении момента M_x

относительно оси X. Аналогично, при нахождении проекции L_x достаточно проектировать только параллельную слагаемую вектора $\boldsymbol{L}$:

$$\boldsymbol{L}_{\parallel}=[\boldsymbol{r}_{\perp}\boldsymbol{p}_{\perp}].$$

Изложенное тривиальным образом обобщается на случай системы нескольких сил и системы нескольких материальных точек.

Назовем *плечом силы относительно некоторой оси* кратчайшее расстояние между осью и линией действия силы. Тогда *момент силы относительно той же оси* может быть определен как взятое с надлежащим знаком произведение перпендикулярной составляющей силы на соответствующее плечо. Такое определение момента дается в элементарной физике. Так как точку приложения силы можно перемещать произвольно вдоль линии ее действия, то это определение согласуется с определением, которое было приведено выше. Это видно из рис. 58, где предполагается, что ось перпендикулярна к плоскости рисунка и проходит через полюс O.

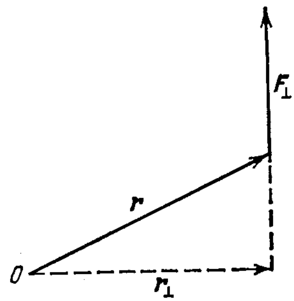

Рис. 58.

Аналогично, *момент импульса материальной точки относительно оси* можно определить как взятое с надлежащим знаком произведение слагающей импульса, перпендикулярной к этой оси, на соответствующее плечо.

§ 33. Уравнение момента импульса для вращения вокруг неподвижной оси. Момент инерции

1. Применим уравнение моментов относительно оси к рассмотрению *вращательного движения*. За неподвижную ось моментов удобно выбрать *ось вращения*. Если материальная точка вращается по окружности радиуса r (рис. 59), то момент ее импульса относительно оси вращения O равен $L=mvr$. Пусть ω — угловая скорость вращения, тогда $v=\omega r$, и, следовательно, $L=mr^2\omega$. Если вокруг оси O вращается система материальных точек с одной и той же угловой скоростью ω, то $L=\sum mr^2\omega$, где суммирование производится по всем материальным точкам системы. Величину ω как одинаковую для всех материальных точек можно вынести из-под знака суммы. Тогда получится

$$L=I\omega, \tag{33.1}$$

где

$$I=\sum mr^2. \tag{33.2}$$