относительно оси X. Аналогично, при нахождении проекции L_x достаточно проектировать только параллельную слагаемую вектора $\boldsymbol{L}$:

$$\boldsymbol{L}_{\parallel} = [\boldsymbol{r}_{\perp}\boldsymbol{p}_{\perp}].$$

Изложенное тривиальным образом обобщается на случай системы нескольких сил и системы нескольких материальных точек.

Назовем *плечом силы относительно некоторой оси* кратчайшее расстояние между осью и линией действия силы. Тогда *момент силы относительно той же оси* может быть определен как взятое с надлежащим знаком произведение перпендикулярной составляющей силы на соответствующее плечо. Такое определение момента дается в элементарной физике. Так как точку приложения силы можно перемещать произвольно вдоль линии ее действия, то это определение согласуется с определением, которое было приведено выше. Это видно из рис. 58, где предполагается, что ось перпендикулярна к плоскости рисунка и проходит через полюс O.

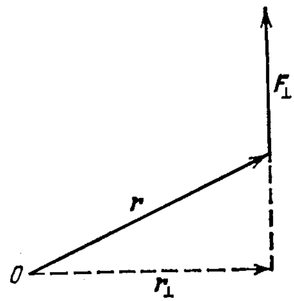

Рис. 58.

Аналогично, *момент импульса материальной точки относительно оси* можно определить как взятое с надлежащим знаком произведение слагающей импульса, перпендикулярной к этой оси, на соответствующее плечо.

§ 33. Уравнение момента импульса для вращения вокруг неподвижной оси. Момент инерции

1. Применим уравнение моментов относительно оси к рассмотрению *вращательного движения*. За неподвижную ось моментов удобно выбрать *ось вращения*. Если материальная точка вращается по окружности радиуса r (рис. 59), то момент ее импульса относительно оси вращения O равен $L = mvr$. Пусть ω — угловая скорость вращения, тогда $v = \omega r$, и, следовательно, $L = mr^2\omega$. Если вокруг оси O вращается система материальных точек с одной и той же угловой скоростью ω, то $L = \sum mr^2\omega$, где суммирование производится по всем материальным точкам системы. Величину ω как одинаковую для всех материальных точек можно вынести из-под знака суммы. Тогда получится

$$L = I\omega, \tag{33.1}$$

где

$$I = \sum mr^2. \tag{33.2}$$

Величина I, равная сумме произведений масс материальных точек на квадраты расстояний их до оси вращения, называется *моментом инерции системы относительно этой оси*. Уравнение (33.1) показывает, что *при вращении системы момент ее импульса относительно оси вращения равен произведению момента инерции относительно той же оси на угловую скорость*.

Если на вращательное движение системы материальных точек накладывается еще *радиальное движение* их, а также *движение параллельно оси*, то наличие таких движений не отразится на справедливости формулы (33.1). Это следует из того, что *момент импульса материальной точки зависит от ее скорости* $\boldsymbol{v}$ *линейно*. Когда же скорость $\boldsymbol{v}$ направлена по радиусу или параллельно оси вращения, то момент импульса относительно этой оси равен нулю. Поэтому такие движения непосредственно не сказываются на виде связи между моментом импульса системы относительно оси вращения и ее угловой скоростью. Их влияние косвенное и состоит в том, что момент инерции I перестает быть постоянной величиной, а меняется во времени в соответствии с изменением мгновенной конфигурации системы. В этом случае уравнение (32.2) принимает вид

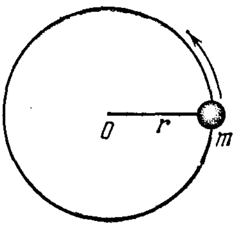

Рис. 59.

$$\frac{d}{dt}(I\omega) = M, \tag{33.3}$$

где M — момент внешних сил относительно оси вращения. Это — *основное уравнение динамики вращательного движения вокруг неподвижной оси*. Оно напоминает уравнение Ньютона для движения материальной точки. Роль массы играет момент инерции I, роль скорости — угловая скорость ω, роль силы — момент силы M, роль импульса — момент импульса L. Момент импульса L часто называют *вращательным импульсом системы*. Пользуясь этой терминологией, можно сказать, что *производная вращательного импульса системы по времени равна моменту внешних сил относительно оси вращения*.

Если момент внешних сил M относительно оси вращения равен нулю, то вращательный импульс $I\omega$ сохраняется.

2. Важным частным случаем является вращение неизменяемой системы материальных точек или твердого тела вокруг неподвижной оси. В этом случае момент инерции I при вращении остается постоянным, и уравнение (33.3) переходит в

$$I\frac{d\omega}{dt} = M. \tag{33.4}$$

Произведение момента инерции твердого тела относительно непо-

движной оси вращения на угловое ускорение $\frac{d\omega}{dt}$ *равно моменту внешних сил относительно той же оси.*

Для лучшего уяснения уравнения (33.4) приведем другой его вывод, основанный непосредственно на уравнении движения материальной точки. Последнее в случае вращения материальной точки вокруг неподвижной оси имеет вид $m\frac{dv}{dt}=F_\tau$, где F_τ — тангенциальная слагающая действующей силы. Так как $v=\omega r$, то, умножая предыдущее уравнение на r, получим $mr^2\frac{d\omega}{dt}=rF_\tau$. Напишем такие соотношения для каждой материальной точки, а затем сложим их. Тогда мы снова придем к уравнению (33.4). При этом все внутренние силы исключатся, так что под M в уравнении (33.4) следует понимать момент одних только внешних сил. Этот элементарный вывод обладает, однако, тем недостатком, что он дает уравнение вращательного движения только в частной форме (33.4), но не в общей форме (33.3).

3. Аналогия между движением материальной точки и вращением твердого тела относительно неподвижной оси может быть прослежена дальше. Если материальная точка вращается по окружности, то элементарная работа при повороте на угол $d\varphi$ равна $dA=F\,ds=Fr\,d\varphi=M\,d\varphi$. Такое же выражение получится и для твердого тела, так как его можно рассматривать как систему материальных точек, вращающихся с общей угловой скоростью ω. Внутренние силы исключаются, так как в случае твердого тела, как было показано в § 24, они работы не совершают. Итак, для твердого тела

$$dA=M\,d\varphi. \tag{33.5}$$

Роль силы играет момент внешних сил, роль линейного перемещения — угловое перемещение.

Кинетическая энергия вращающегося твердого тела представляется в виде

$$K=\frac{1}{2}\sum mv^2-\frac{1}{2}\sum m(\omega r)^2=\frac{\omega^2}{2}\sum mr^2,$$

или

$$K=\frac{1}{2}I\omega^2=\frac{L^2}{2I}. \tag{33.6}$$

Эти выражения напоминают соответствующие выражения для кинетической энергии материальной точки. Они получаются из последних формальной заменой $m\to I$, $v\to\omega$, $p\to L$.

§ 34. Примеры на закон сохранения вращательного импульса

1. Поучительные демонстрационные опыты на закон сохранения момента импульса можно осуществить с помощью так называемой *скамьи Жуковского* (1847 — 1921). Скамья Жуковского представляет собой стул, сиденье которого имеет форму диска. Диск может