движной оси вращения на угловое ускорение $\frac{d\omega}{dt}$ *равно моменту внешних сил относительно той же оси.*

Для лучшего уяснения уравнения (33.4) приведем другой его вывод, основанный непосредственно на уравнении движения материальной точки. Последнее в случае вращения материальной точки вокруг неподвижной оси имеет вид $m\frac{dv}{dt}=F_\tau$, где F_τ — тангенциальная слагающая действующей силы. Так как $v=\omega r$, то, умножая предыдущее уравнение на r, получим $mr^2\frac{d\omega}{dt}=rF_\tau$. Напишем такие соотношения для каждой материальной точки, а затем сложим их. Тогда мы снова придем к уравнению (33.4). При этом все внутренние силы исключатся, так что под M в уравнении (33.4) следует понимать момент одних только внешних сил. Этот элементарный вывод обладает, однако, тем недостатком, что он дает уравнение вращательного движения только в частной форме (33.4), но не в общей форме (33.3).

3. Аналогия между движением материальной точки и вращением твердого тела относительно неподвижной оси может быть прослежена дальше. Если материальная точка вращается по окружности, то элементарная работа при повороте на угол $d\varphi$ равна $dA=F\,ds=Fr\,d\varphi=M\,d\varphi$. Такое же выражение получится и для твердого тела, так как его можно рассматривать как систему материальных точек, вращающихся с общей угловой скоростью ω. Внутренние силы исключаются, так как в случае твердого тела, как было показано в § 24, они работы не совершают. Итак, для твердого тела

$$dA=M\,d\varphi. \tag{33.5}$$

Роль силы играет момент внешних сил, роль линейного перемещения — угловое перемещение.

Кинетическая энергия вращающегося твердого тела представляется в виде

$$K=\frac{1}{2}\sum mv^2-\frac{1}{2}\sum m(\omega r)^2=\frac{\omega^2}{2}\sum mr^2,$$

или

$$K=\frac{1}{2}I\omega^2=\frac{L^2}{2I}. \tag{33.6}$$

Эти выражения напоминают соответствующие выражения для кинетической энергии материальной точки. Они получаются из последних формальной заменой $m\to I$, $v\to\omega$, $p\to L$.

§ 34. Примеры на закон сохранения вращательного импульса

1. Поучительные демонстрационные опыты на закон сохранения момента импульса можно осуществить с помощью так называемой *скамьи Жуковского* (1847 — 1921). Скамья Жуковского представляет собой стул, сиденье которого имеет форму диска. Диск может

свободно вращаться вокруг вертикальной оси на шариковых подшипниках. Во время опыта демонстратор садится или становится на скамью Жуковского и, отталкиваясь от пола, может приводить ее во вращение. После прекращения толчка единственными внешними силами, которые могут создать момент относительно оси вращения, являются силы трения и сопротивления воздуха. Силы трения благодаря применению шариковых подшипников очень малы, а сопротивление воздуха может не приниматься во внимание,

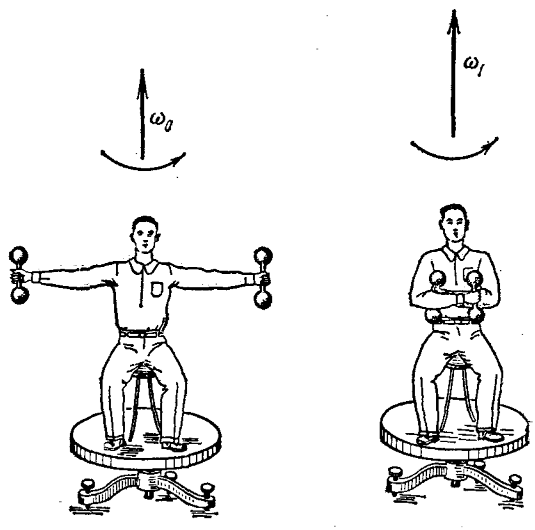

Рис. 60.

пока число оборотов скамьи невелико. Поэтому момент импульса системы, состоящей из скамьи и демонстратора, относительно оси вращения не может меняться во времени, если система предоставлена самой себе.

Демонстратор на скамье Жуковского, оттолкнувшись ногою от пола, приводит ее во вращение. Вместе со скамьей вращается и он сам. Во время вращения вращательный импульс системы будет оставаться постоянным. Какие бы внутренние движения ни совершались в системе — внутренние силы не могут изменить вращательный импульс. Если демонстратор разведет руки в стороны, то он увеличит момент инерции системы I, а потому угловая скорость вращения ω должна уменьшиться, чтобы остался неизменным вращательный импульс $I\omega$. Если демонстратор сводит руки к оси вращения, то момент инерции I уменьшается, а угловая скорость увеличивается. Для усиления эффекта демонстратор держит в руках тяжелые гири. При максимальном удалении гирь от оси вращения момент инерции увеличивается в несколько раз. В такое же число раз уменьшается угловая скорость вращения (рис. 60) *).

2. Когда балерина делает пируэт, она вращается на носке, вокруг вертикальной оси. Ноги и руки при этом максимально приближены к оси вращения, и угловая скорость максимальна. Для замедления вращения и остановки балерина разводит руки и отводит ногу в сторону. Наоборот, для сообщения своему телу быстрого вращения балерина отталкивается от пола, получая вращательный импульс, когда момент инерции ее тела максимален. Затем она соответствующим движением уменьшает момент инерции в несколько раз и тем самым увеличивает угловую скорость вращения. Таким образом, она управляет скоростью вращения путем изменения момента инерции своего тела. В сущности, она делает то же самое, что и демонстратор на скамье Жуковского. Тем же самым приемом пользуется гимнаст, выполняющий упражнение на перекладине.

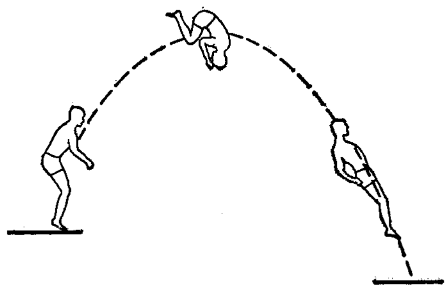

Рис. 61.

3. Прыгун, чтобы сделать *сальто,* отталкивается от трамплина и тем самым сообщает своему телу вращательный импульс. Этот импульс сохраняется при дальнейшем движении прыгуна в воздухе. Вначале тело прыгуна вытянуто и момент инерции велик. В некоторый момент прыгун свертывается клубком (рис. 61), уменьшая момент инерции в три и большее число раз. Угловая скорость возрастает во столько же раз. С этой угловой скоростью прыгун выполняет один, два и даже три полных оборота. В нужный момент прыгун снова выпрямляет тело и с малой угловой скоростью становится на землю или погружается в воду. Приведя этот пример, мы несколько забежали вперед, так как здесь ось, вокруг которой вращается тело прыгуна, не неподвижна, а движется в пространстве. Однако, если движущаяся ось вращения проходит через центр масс прыгуна, то вращение совершается по тем же законам, что н вращение вокруг неподвижной оси (см. § 37).

4. Земля при вращении вокруг собственной оси ведет себя подобно скамье Жуковского. Всякое перемещение масс внутри Земли (выпадание осадков, вулканическая деятельность, горообразование и пр.) меняет момент инерции, а с ним и угловую скорость вращения Земли. Это является причиной нерегулярных колебаний продолжительности суток. Экспериментально обнаружены перио-

*) Рис. 60 взят из книги С. П. Стрелкова «Механика».

дические колебания продолжительности суток с основным периодом в один год и с амплитудой около 0,001 с. Земля подвержена также регулярным внешним воздействиям, прежде всего силам приливного трения, связанным с гравитационным притяжением Луны и Солнца. Благодаря этому средние солнечные сутки увеличиваются примерно на $1{,}640 \cdot 10^{-3}$ с в столетие. Как уже говорилось в § 1, неравномерность вращения Земли можно наблюдать с помощью кварцевых, атомных или молекулярных часов. Ход таких часов управляется колебаниями кристаллической решетки кварца, а также внутриатомными и внутримолекулярными колебаниями при излучении спектральных линий. Указанные колебания обладают значительно большей стабильностью, чем вращение Земли вокруг собственной оси или вокруг Солнца. Это и является причиной, почему в настоящее время эталон времени — секунда — устанавливается именно с помощью таких колебательных процессов, а не с помощью вращения Земли вокруг своей оси или Солнца, как это делалось до недавнего времени (см. § 1).

5. Вернемся к опыту со скамьей Жуковского. При уменьшении момента инерции вращающегося тела его кинетическая энергия увеличивается (при условии, что момент внешних сил равен нулю). Это непосредственно видно из формулы (33.6), так как в рассматриваемом случае вращательный импульс системы $L = I\omega$ не изменяется. Изменение кинетической энергии системы может происходить только за счет работы каких-то сил. Такими силами в нашем примере являются внутренние силы, действующие в системе. Они не могут изменить момент импульса системы. Однако совершаемая ими работа, вообще говоря, отлична от нуля и идет на изменение кинетической энергии вращения системы. Демонстратор на скамье Жуковского должен развить определенную мускульную силу, чтобы удержать вращающиеся гири на их круговых траекториях. Сила, с которой он действует на гирю, есть центростремительная сила $F = m\omega^2 r$, где m — масса гири, а r — расстояние ее от оси вращения. Когда демонстратор приближает гирю к оси вращения, сила F совершает положительную работу. За счет этой работы и происходит увеличение кинетической энергии системы. При удалении гири работа силы F отрицательна, и кинетическая энергия уменьшается.

Подтвердим эти рассуждения простым расчетом. Чтобы максимально упростить вычисления, схематизируем опыт, заменив реальную систему идеализированной моделью ее. Будем считать, что гири являются материальными точками, а массы рук демонстратора пренебрежимо малы. При такой схематизации момент инерции системы представится выражением $I = I_0 + 2mr^2$, где I_0 — момент инерции системы без гирь, а $2mr^2$ — момент инерции самих гирь (двойка потому, что гирь две). Будем предполагать, что приближение и удаление гирь к оси вращения совершается бесконечно медленно. Тогда в любой момент времени можно пренебречь кинетической энергией радиального движения. Вся работа внутренних сил пойдет на изменение кинетической энергии вращения системы. Вычислим работу A, совершаемую демонстратором, когда он тянет гири к оси впащения, перемещая их с расстояния r_1 до $r_2 < r_1$. Как было показано в § 24, при вычислении работы имеет значение только относительное движение взаимодействующих тел. В нашей задаче это есть движение гирь относительно демонстратора. Каждую гирю демонстратор тянет с силой $m\omega^2 r$. Элементарная работа, совершаемая им, положительна и равна $-2m\omega^2 r\,dr$ (в нашем случае $dr < 0$). Полная работа A определится интегралом

$$A = -\int_{r_1}^{r_2} 2m\omega^2 r\,dr = -2m\int_{r_1}^{r_2} \frac{(I\omega)^2}{I^2}\,r\,dr = -2m\int_{r_1}^{r_2} \frac{L^2}{I^2}\,r\,dr.$$

Так как момент импульса L во время движения остается постоянным, а $I = I_0 + 2mr^2$, то

$$A = -2mL^2\int_{r_1}^{r_2} \frac{r\,dr}{(I_0+2mr^2)^2} = \frac{L^2}{2}\left\{\frac{1}{I_0+2mr_2^2} - \frac{1}{I_0+2mr_1^2}\right\},$$

или

$$A = \frac{L^2}{2I_2} - \frac{L^2}{2I_1} = K_2 - K_1.$$

Та же формула справедлива и при удалении гирь от оси вращения. Она показывает, что *кинетическая энергия вращения изменяется за счет работы мускульной силы демонстратора.*

6. Приведенное объяснение, однако, не отвечает на вопрос, какие силы вызывают изменение угловой скорости вращения системы. Если бы на гирю действовала только центростремительная сила, то она, как сила центральная, не могла бы изменить вращательный импульс гири. Должны были бы сохраняться в отдельности вращательные импульсы гирь и скамьи Жуковского вместе с демонстратором. Гири и скамья Жуковского вращались бы с различными угловыми скоростями. На самом деле этого нет. При движении гирь по радиусу происходит выравнивание угловых скоростей. Отсюда можно заключить, что во время такого движения помимо центростремительных сил *на гири действуют силы бокового давления со стороны рук демонстратора. Эти силы и изменяют угловую скорость вращения гирь. Гири в свою очередь оказывают боковое давление на руки демонстратора, в результате чего меняется угловая скорость вращения скамьи вместе с демонстратором.* Демонстратор на скамье Жуковского очень хорошо ощущает действие этих сил бокового давления при всяком, в особенности быстром, радиальном перемещении гирь. Дополнительные силы бокового давления перпендикулярны к оси вращения и к относительной скорости гирь. Работы они не производят. Их наличие не может сказаться на результате вычисления работы A, которое было произведено выше. *Силы бокового давления,* однако, *имеют моменты относительно оси вращения и производят перераспределение неизменного момента импульса системы между гирями — с одной* *стороны — и скамьей Жуковского с демонстратором — с другой*. В результате их действия все эти тела вращаются с общей угловой скоростью. Количественное рассмотрение вопроса будет произведено в § 64.

7. С помощью скамьи Жуковского можно демонстрировать и векторный характер момента импульса. Для этой цели применяется велосипедное колесо с утяжеленным ободом. Если колесо вращается вокруг собственной оси, то вследствие осевой симметрии полный импульс его $\boldsymbol{p}$ равен нулю. В этом случае, как было показано в § 30, момент импульса $\boldsymbol{L}$ относительно неподвижной точки не зависит от положения этой точки. С другой стороны, проекция вектора $\boldsymbol{L}$ на ось вращения колеса равна $I\Omega$, где I — момент инерции

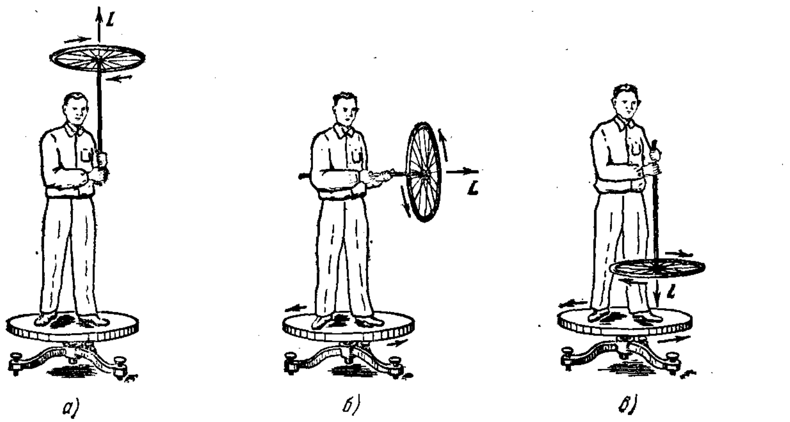

Рис. 62.

колеса, а Ω — его угловая скорость. Проекция вектора $\boldsymbol{L}$ на любое направление, перпендикулярное к оси колеса, равна нулю ввиду осевой симметрии. Отсюда следует, что вектор момента импульса $\boldsymbol{L}$ направлен вдоль оси колеса и по величине равен $I\Omega$.

Демонстратор садится или становится на скамью Жуковского. Ему передают быстро вращающееся колесо с вертикально направленной осью (рис. 62). Полный момент импульса системы направлен вертикально и равен $I\Omega$. Примем вертикальную ось скамьи Жуковского за ось X. Так как момент внешних сил относительно оси X равен нулю, то проекция L_x полного момента импульса системы на эту ось должна сохраняться. В начале опыта весь вращательный импульс сосредоточен в колесе. Затем демонстратор наклоняет ось колеса на угол α. Проекция момента импульса колеса на ось X становится равной $L_x^{\text{кол}} = I\Omega\cos\alpha$, т. е. она уменьшается на $I\Omega(1 - \cos\alpha)$. Это уменьшение должно быть скомпенсировано возрастанием соответствующей проекции момента импульса скамьи и демонстратора на величину $L_x^{\text{скам}} = I\Omega\,(1 - \cos\alpha)$. В результате скамья вместе с демонстратором приходит во вращение с угловой скоростью ω, определяемой из уравнения $I_0\omega = I\Omega\,(1 - \cos\alpha)$, где I_0 — момент инерции скамьи. При $\alpha = 90^\circ$ проекция $L_x^{\text{кол}}$ обращается в нуль — она целиком передается скамье и демонстратору. При $\alpha = 180^\circ$ изменение вращательного импульса колеса становится максимальным $\Delta L_x^{\text{кол}} = 2L_x^{\text{кол}}$, скамья и демонстратор вращаются с максимальной скоростью $\omega_{\text{макс}} = \frac{2I}{I_0}\Omega$. Поворачивая ось, демонстратор придает ей исходное направление — тогда вращение скамьи прекращается. Однако скамья, вообще говоря, не возвращается в исходное положение, а оказывается повернутой вокруг вертикальной оси на некоторый угол.

Наклоняя ось колеса, демонстратор во время ее движения испытывает значительные силы бокового давления. Колесо как бы стремится вырваться из рук демонстратора. Эти силы направлены горизонтально и притом перпендикулярно как к оси колеса, так и к оси скамьи Жуковского. Их геометрическая сумма равна нулю, но они имеют момент относительно оси X. Последний приводит во вращение скамью Жуковского и демонстратора. Происхождение этих сил будет выяснено в гл. VII.

8. Закончим этот параграф следующим замечанием. Пусть имеется замкнутая система тел (назовем ее лабораторией), которая в начальный момент времени покоилась относительно какой-то неподвижной (инерциальной) системы отсчета S. Можно ли с помощью одних только внутренних движений сместить лабораторию в пространстве и притом так, чтобы все тела в ней вернулись в свои исходные положения? Говоря о смещении лаборатории, мы имеем в виду ее поступательное перемещение без вращения. Отрицательный ответ на этот вопрос дает теорема о движении центра масс. Не так обстоит дело в отношении поворота замкнутой системы тел. *С помощью одних только внутренних движений можно повернуть лабораторию в пространстве на любой угол и притом так, что исходное расположение тел в лаборатории восстановится.* Допустим, например, что лаборатория состоит из замкнутой оболочки A, в которой помещено всего одно тело B. Пусть тело B начинает вращаться вокруг некоторой оси с угловой скоростью $\dot\varphi_B$ (относительно неподвижной системы отсчета). Тогда оболочка A придет во вращение относительно той же оси с угловой скоростью $\dot\varphi_A$. По закону сохранения вращательного импульса $I_A\dot\varphi_A + I_B\dot\varphi_B = 0$, так как в начальный момент вращательный импульс был равен нулю (I_A и I_B — моменты инерции оболочки A и тела B соответственно). Если углы φ_A и φ_B условиться отсчитывать от начальных положений тел A и B, то после интегрирования получится $I_A\varphi_A + I_B\varphi_B = 0$. Угол поворота тела B относительно оболочки A определится разностью $\varphi=\varphi_B-\varphi_A=-\left(\frac{I_A}{I_B}+1\right)\varphi_A$. Если $\varphi=2\pi n$ (n — целое число), то тело B возвратится в исходное положение относительно оболочки A. При этом угол поворота оболочки φ_A, вообще говоря, не будет равен нулю. Различие в поведении лаборатории при поступательном перемещении и вращении связано со следующим обстоятельством. *При непрерывном поступательном перемещении тела B оно никогда не возвращается в исходное положение относительно тела A.* Различным значениям координаты x соответствуют и различные положения тела. Напротив, *при непрерывном вращении тела B взаимное расположение тел B и A периодически восстанавливается:* значениям угла φ, отличающимся на $2n\pi$, соответствует *одно и то же* относительное расположение тел A и B. Падающая кошка, вращая хвостом и лапами, придает своему телу такое положение, чтобы встать на землю лапами. И это ей удается.

Эти явления можно имитировать на скамье Жуковского. Демонстратор, совершая конические вращения одной или обеими руками, всегда может повернуть скамью Жуковского на произвольный угол. Для усиления эффекта он может взять в руки массивный предмет с большим моментом инерции, например молот.

§ 35. Теорема Гюйгенса — Штейнера

Найдем связь между моментами инерции тела относительно двух различных параллельных осей. Предполагается, что эти оси перпендикулярны к плоскости рисунка и пересекают ее в точках O и A. Ради краткости будем называть самые оси также осями O и A. Разобьем мысленно тело на элементарные массы dm. Радиусы-векторы одной из них, проведенные от осей O и A параллельно плоскости рисунка, обозначим $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{r}'$ соответственно. (На рис. 63 изображен такой случай, когда элементарная масса dm лежит в плоскости рисунка). Тогда $\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}$, где $\boldsymbol{a}$ означает радиус-вектор $\overrightarrow{OA}$. Следовательно, $r'^2=r^2+a^2-2(\boldsymbol{ar})$,

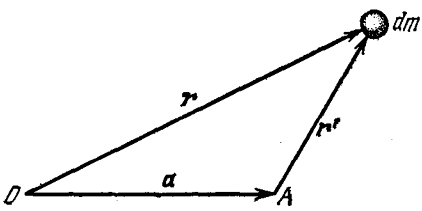

Рис. 63.

$$\int r'^2\,dm=\int r^2\,dm+a^2\int dm-2\left(\boldsymbol{a}\int \boldsymbol{r}\,dm\right).$$

Интеграл слева есть момент инерции I_A тела относительно оси A, первый интеграл справа — момент инерции относительно оси O. Последний интеграл можно представить в виде $\int \boldsymbol{r}\,dm=m\boldsymbol{R}_C$,