разностью $\varphi=\varphi_B-\varphi_A=-\left(\frac{I_A}{I_B}+1\right)\varphi_A$. Если $\varphi=2\pi n$ (n — целое число), то тело B возвратится в исходное положение относительно оболочки A. При этом угол поворота оболочки φ_A, вообще говоря, не будет равен нулю. Различие в поведении лаборатории при поступательном перемещении и вращении связано со следующим обстоятельством. *При непрерывном поступательном перемещении тела B оно никогда не возвращается в исходное положение относительно тела A.* Различным значениям координаты x соответствуют и различные положения тела. Напротив, *при непрерывном вращении тела B взаимное расположение тел B и A периодически восстанавливается:* значениям угла φ, отличающимся на $2n\pi$, соответствует *одно и то же* относительное расположение тел A и B. Падающая кошка, вращая хвостом и лапами, придает своему телу такое положение, чтобы встать на землю лапами. И это ей удается.

Эти явления можно имитировать на скамье Жуковского. Демонстратор, совершая конические вращения одной или обеими руками, всегда может повернуть скамью Жуковского на произвольный угол. Для усиления эффекта он может взять в руки массивный предмет с большим моментом инерции, например молот.

§ 35. Теорема Гюйгенса — Штейнера

Найдем связь между моментами инерции тела относительно двух различных параллельных осей. Предполагается, что эти оси перпендикулярны к плоскости рисунка и пересекают ее в точках O и A. Ради краткости будем называть самые оси также осями O и A. Разобьем мысленно тело на элементарные массы dm. Радиусы-векторы одной из них, проведенные от осей O и A параллельно плоскости рисунка, обозначим $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{r}'$ соответственно. (На рис. 63 изображен такой случай, когда элементарная масса dm лежит в плоскости рисунка). Тогда $\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}$, где $\boldsymbol{a}$ означает радиус-вектор $\overrightarrow{OA}$. Следовательно, $r'^2=r^2+a^2-2(\boldsymbol{ar})$,

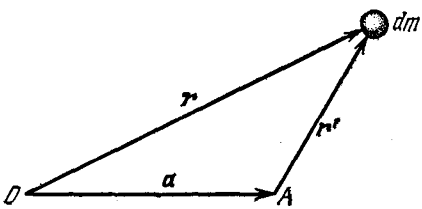

Рис. 63.

$$\int r'^2\,dm=\int r^2\,dm+a^2\int dm-2\left(\boldsymbol{a}\int \boldsymbol{r}\,dm\right).$$

Интеграл слева есть момент инерции I_A тела относительно оси A, первый интеграл справа — момент инерции относительно оси O. Последний интеграл можно представить в виде $\int \boldsymbol{r}\,dm=m\boldsymbol{R}_C$, где $\boldsymbol{R}_C$ — радиус-вектор центра масс C тела относительно оси O (точнее, $\boldsymbol{R}_C$ есть слагающая радиуса-вектора центра масс, параллельная плоскости рисунка). Таким образом,

$$I_A = I_O + ma^2 - 2m(\boldsymbol{a}\boldsymbol{R}_C). \qquad (35.1)$$

Допустим, что ось O проходит через центр масс C тела. Тогда $\boldsymbol{R}_C = 0$, и предыдущая формула упрощается, принимая вид

$$I_A = I_C + ma^2. \qquad (35.2)$$

Это важное геометрическое соотношение называется *теоремой Гюйгенса — Штейнера* (1796—1863). *Момент инерции тела относительно какой-либо оси равен моменту инерции его относительно параллельной оси, проходящей через центр масс, сложенному с величиной ma^2, где a — расстояние между осями.*

§ 36. Вычисление моментов инерции

1. Момент инерции тела относительно какой-либо оси можно найти вычислением или измерить экспериментально*). Если вещество в теле распределено непрерывно, то вычисление момента инерции его сводится к вычислению интеграла

$$I = \int r^2\, dm, \qquad (36.1)$$

в котором r — расстояние от элемента массы dm до оси вращения. Интегрирование должно производиться по всей массе тела. Аналитическое вычисление таких интегралов возможно только в простейших случаях тел правильной геометрической формы. Для тел неправильной формы такие интегралы могут быть найдены численно.

Вычисление моментов инерции во многих случаях можно упростить, используя соображения подобия и симметрии, теорему Гюйгенса — Штейнера, а также некоторые другие общие соотношения, о которых будет сказано ниже.

Рассмотрим два подобных и подобно расположенных относительно оси вращения тела A и B одной и той же плотности. Полные и элементарные массы этих тел относятся как кубы их линейных размеров l. Так как элементарные массы умножаются на квадраты расстояний их до оси вращения, то моменты инерции тел A и B будут относиться как пятые степени тех же размеров. Таким образом $I \sim l^5$, или

$$I = kml^2. \qquad (36.2)$$

Под l следует понимать какой-либо *характерный размер тела* или расстояние какой-либо характерной точки его от оси вращения.

*) Об одном методе экспериментального определения моментов инерции говорится в § 42.