

где R_C — радиус-вектор центра масс C тела относительно оси O (точнее, R_C есть слагающая радиуса-вектора центра масс, параллельная плоскости рисунка). Таким образом,

$$I_A = I_O + ma^2 - 2m(aR_C). \quad (35.1)$$

Допустим, что ось O проходит через центр масс C тела. Тогда $R_C = 0$, и предыдущая формула упрощается, принимая вид

$$I_A = I_C + ma^2. \quad (35.2)$$

Это важное геометрическое соотношение называется *теоремой Гюйгенса — Штейнера* (1796—1863). *Момент инерции тела относительно какой-либо оси равен моменту инерции его относительно параллельной оси, проходящей через центр масс, сложенному с величиной ma^2 , где a — расстояние между осями.*

§ 36. Вычисление моментов инерции

1. Момент инерции тела относительно какой-либо оси можно найти вычислением или измерить экспериментально*). Если вещество в теле распределено непрерывно, то вычисление момента инерции его сводится к вычислению интеграла

$$I = \int r^2 dm, \quad (36.1)$$

в котором r — расстояние от элемента массы dm до оси вращения. Интегрирование должно производиться по всей массе тела. Аналитическое вычисление таких интегралов возможно только в простейших случаях тел правильной геометрической формы. Для тел неправильной формы такие интегралы могут быть найдены численно.

Вычисление моментов инерции во многих случаях можно упростить, используя соображения подобия и симметрии, теорему Гюйгенса — Штейнера, а также некоторые другие общие соотношения, о которых будет сказано ниже.

Рассмотрим два подобных и подобно расположенных относительно оси вращения тела A и B одной и той же плотности. Полные и элементарные массы этих тел относятся как кубы их линейных размеров l . Так как элементарные массы умножаются на квадраты расстояний их до оси вращения, то моменты инерции тел A и B будут относиться как пятые степени тех же размеров. Таким образом $I \sim l^5$, или

$$I = kml^2. \quad (36.2)$$

Под l следует понимать какой-либо *характерный размер тела* или расстояние какой-либо характерной точки его от оси вращения.

*) Об одном методе экспериментального определения моментов инерции говорится в § 42.

Коэффициент пропорциональности k зависит только от формы тела и его расположения относительно оси вращения.

2. Вычисление момента инерции тела относительно оси часто можно упростить, вычислив предварительно *момент инерции его относительно точки*. Сам по себе момент инерции тела относительно точки не играет никакой роли в динамике. Он является чисто вспомогательным понятием, служащим для упрощения вычислений. *Моментом инерции тела относительно точки O* называется сумма произведений масс материальных точек, из которых тело состоит,

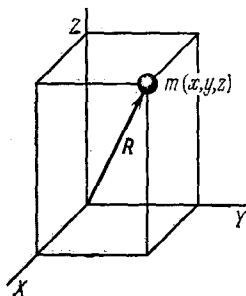


Рис. 64.

на квадраты их расстояний R до точки O : $\Theta = \Sigma mR^2$. В случае непрерывного распределения масс эта сумма сводится к интегралу $\Theta = \int R^2 dm$. Само собой понятно, что момент Θ не следует смешивать с моментом инерции I относительно оси. В случае момента I массы dm умножаются на квадраты расстояний до этой оси, а в случае момента Θ — до неподвижной точки.

Рассмотрим сначала одну материальную точку с массой m и с координатами x, y, z относительно прямоугольной системы координат (рис. 64). Квадраты расстояний ее до координатных осей X, Y, Z равны соответственно $y^2 + z^2, z^2 + x^2, x^2 + y^2$, а моменты инерции относительно тех же осей

$$I_x = m(y^2 + z^2), \quad I_y = m(z^2 + x^2), \quad I_z = m(x^2 + y^2).$$

Сложив эти три равенства, получим

$$I_x + I_y + I_z = 2m(x^2 + y^2 + z^2).$$

Но $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, где R — расстояние точки m от начала координат O . Поэтому

$$I_x + I_y + I_z = 2\Theta. \quad (36.3)$$

Это соотношение справедливо не только для одной материальной точки, но и для произвольного тела, так как тело можно рассматривать как совокупность материальных точек. Таким образом, *сумма моментов инерции тела относительно трех взаимно перпендикулярных осей, пересекающихся в одной точке O , равна удвоенному моменту инерции того же тела относительно этой точки*.

Если повернуть координатные оси X, Y, Z относительно тела, оставляя углы между ними прямыми, то моменты инерции I_x, I_y, I_z , вообще говоря, изменятся. Однако их сумма останется той же самой, так как она равна 2Θ , а величина Θ не зависит от ориентации координатных осей. Таким образом, *сумма моментов инерции I_x, I_y, I_z относительно любых трех взаимно перпендикулярных осей,*

проходящих через одну точку, зависит только от положения этой точки и не меняется с изменением ориентации осей. Более глубокая геометрическая природа этого утверждения раскрывается в тензорной алгебре.

3. Другое следствие можно получить для плоского распределения масс. Допустим, что имеется пластинка произвольной формы с произвольным распределением вещества по ее объему. Если пластинка очень тонкая, то можно считать, что вещество распределено бесконечно тонким слоем по математической плоскости. Примем эту плоскость за координатную плоскость XU . Тогда z -координаты всех материальных точек будут равны нулю, а потому момент инерции Θ пластинки относительно начала координат O представится выражением $\Theta = \Sigma \Delta m (x^2 + y^2)$, т. е. будет равен моменту инерции пластинки относительно оси Z . Таким образом, в случае плоского распределения масс $I_x + I_y + I_z = 2I_z$, т. е.

$$I_x + I_y = I_z. \quad (36.4)$$

Далее, очевидно, что величина Θ не меньше каждого из моментов инерции I_x, I_y, I_z , например $\Theta \geq I_z$ (знак равенства имеет место только для плоского распределения масс). Вычитая неравенство $2I_z \leq 2\Theta$ из равенства (36.3), получим $I_x + I_y - I_z \geq 0$, или

$$I_x + I_y \geq I_z. \quad (36.4a)$$

Отсюда следует, что из отрезков, длины которых численно равны I_x, I_y, I_z , всегда можно составить треугольник. Для плоского распределения масс (в плоскости XU) формула (36.4a) переходит в формулу (36.4).

После этих предварительных замечаний можно перейти к вычислению моментов инерции конкретных тел.

4. Момент инерции тонкого однородного стержня относительно перпендикулярной оси. Пусть ось проходит через конец стержня A (рис. 65). Для момента инерции можно написать $I_A = km l^2$, где l — длина стержня. Центр стержня C является его центром масс. По теореме Гюйгенса — Штейнера $I_A = I_C + m(l/2)^2$. Величину I_C можно представить как сумму моментов инерции двух стержней, CA и CB , длина каждого из которых равна $l/2$, масса $m/2$, а следовательно, момент инерции равен $k \frac{m}{2} \left(\frac{l}{2}\right)^2$. Таким образом, $I_C = km(l/2)^2$. Подставляя эти выражения в предыдущую формулу, получим

$$kml^2 = km \left(\frac{l}{2}\right)^2 + m \left(\frac{l}{2}\right)^2,$$

откуда $k = 1/3$. В результате находим

$$I_A = \frac{1}{3} ml^2, \quad (36.5)$$

$$I_C = \frac{1}{12} ml^2. \quad (36.6)$$

Существенно, что стержень тонкий. Бесконечно тонкий стержень можно рассматривать как отрезок прямой линии. Он всегда геометрически подобен любой его части. Поэтому коэффициент k будет одним и тем же для всего стержня и для любой его части, например, половины. Для стержня конечной толщины подобие между всем стержнем и его частью уже не имеет места. В этом случае численный коэффициент k имеет разные значения для всего стержня и его половины. По этой причине к стержню конечной толщины формулы (36.5) и (36.6) не применимы. Но ими как приближенными формулами можно пользоваться, когда поперечные размеры стержня очень малы по сравнению с его длиной.

5. Момент инерции однородных прямоугольной пластинки и прямоугольного параллелепипеда. Пусть координатные оси X и Y проходят через центр пластинки C и параллельны ее сторонам (рис. 66). Представим себе, что все вещество пластинки смещено параллельно оси X и сконцентрировано на оси Y . При таком смещении все расстояния

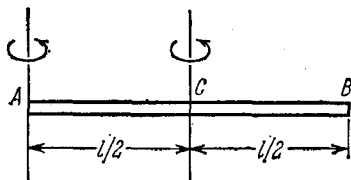


Рис. 65.

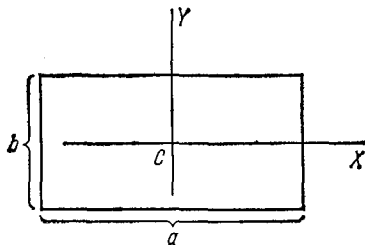


Рис. 66.

материальных точек до оси X не изменятся. Вместе с ними не изменится и момент инерции I_x относительно оси X . Но в результате смещения пластинка перейдет в бесконечно тонкий стержень длины l , к которому применима формула (36.6). В результате получим

$$I_x = \frac{m}{12} b^3, \quad I_y = \frac{m}{12} a^3. \quad (36.7)$$

Момент инерции I_z пластинки относительно оси Z , перпендикулярной к ее плоскости, найдется по формуле (36.4), которая дает

$$I_z = \frac{m}{12} (a^3 + b^3). \quad (36.8)$$

Формула (36.8) годится также для вычисления моментов инерции прямоугольного параллелепипеда относительно его геометрических осей. В этом можно убедиться, если мысленно сжать параллелепипед вдоль одной из геометрических осей в прямоугольную пластинку — при таком сжатии момент инерции относительно этой оси не изменяется. Формула (36.8) дает момент инерции прямоугольного параллелепипеда относительно той его геометрической оси, которая проходит через центр основания с длинами сторон a и b . На рис. 66 эта ось перпендикулярна к плоскости рисунка.

6. Момент инерции бесконечно тонкого круглого кольца (окружности). Момент инерции относительно оси Z (рис. 67), очевидно, равен

$$I_z = mR^2, \quad (36.9)$$

где R — радиус кольца. Ввиду симметрии $I_x = I_y$. Поэтому из формулы (36.4) находим

$$I_x = I_y = \frac{1}{2} mR^2. \quad (36.10)$$

Формула (36.9), очевидно, дает также момент инерции полого однородного цилиндра с бесконечно тонкими стенками относительно его геометрической оси.

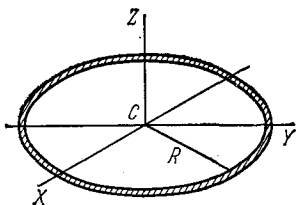


Рис. 67.

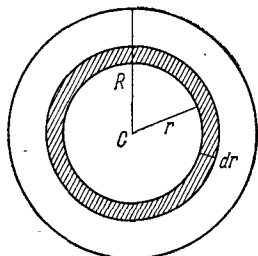


Рис. 68.

7. Момент инерции бесконечно тонкого диска и сплошного цилиндра. Предполагается, что диск и цилиндр однородны, т. е. вещество распределено в них с постоянной плотностью. Пусть ось Z проходит через центр диска C перпендикулярно к его плоскости (рис. 68). Рассмотрим бесконечно тонкое кольцо с внутренним радиусом r и наружным радиусом $r + dr$. Площадь такого кольца $dS = 2\pi r dr$. Его момент инерции найдется по формуле (36.9), он равен $dI_z = r^2 dm$. Момент инерции всего диска определяется интегралом $I_z = \int r^2 dm$. Ввиду однородности диска $dm = m \frac{dS}{S} = 2m \frac{r dr}{R^2}$, где $S = \pi R^2$ — площадь всего диска. Вводя это выражение под знак интеграла, получим

$$I_z = \frac{2m}{R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2} mR^2. \quad (36.11)$$

Момент инерции диска относительно диаметра вдвое меньше, как это непосредственно следует из формулы (36.4) и из соображений симметрии:

$$I_x = I_y = \frac{1}{4} mR^2. \quad (36.12)$$

Формула (36.11) дает также момент инерции однородного сплошного цилиндра относительно его продольной геометрической оси.

8. Момент инерции однородного сплошного цилиндра относительно поперечной оси. Пусть ось вращения проходит через центр основания цилиндра A перпендикулярно к его продольной геометрической оси (рис. 69). Вырежем мысленно бесконечно короткий цилиндр с массой dm , находящийся от оси вращения на расстоянии x . Для его момента инерции по теореме Гюйгенса — Штейнера можно написать

$$dI_A = dm \cdot x^2 + \frac{1}{4} dm \cdot R^2,$$

а для момента инерции всего цилиндра

$$I_A = \int x^2 dm + \frac{1}{4} R^2 \int dm.$$

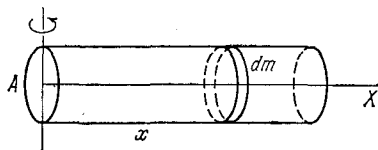


Рис. 69.

Первое слагаемое в правой части формально совпадает с выражением для момента инерции однородного бесконечно тонкого стержня, а потому равно $\frac{1}{3} ml^2$. Второе слагаемое равно $\frac{1}{4} mR^2$. Следовательно,

$$I_A = \frac{1}{3} ml^2 + \frac{1}{4} mR^2. \quad (36.13)$$

Момент инерции I_C относительно поперечной геометрической оси, проходящей через центр масс цилиндра, можно найти по формуле (36.13), если цилиндр разделить на два цилиндра с высотами $l/2$ и массами $m/2$. Получим

$$I_C = \frac{1}{12} ml^2 + \frac{1}{4} mR^2. \quad (36.14)$$

При $R \rightarrow 0$ формулы (36.13) и (36.14) переходят в формулы (36.5) и (36.6) для бесконечно тонкого стержня.

9. Момент инерции полого шара с бесконечно тонкими стенками. Сначала найдем момент инерции Θ относительно центра шара. Очевидно, он равен $\Theta = mR^2$. Затем применяем формулу (36.3), полагая в ней ввиду симметрии $I_x = I_y = I_z = I$. В результате находим момент инерции полого шара относительно его диаметра

$$I = \frac{2}{3} mR^2. \quad (36.15)$$

10. Момент инерции сплошного однородного шара. Сплошной шар можно рассматривать как совокупность бесконечно тонких сферических слоев с массами dm (см. рис. 68). Так как шар по предположению однороден, то $dm = m \frac{dV}{V}$,

где $dV = 4\pi r^2 dr$ — объем сферического слоя, а $V = \frac{4\pi}{3} R^3$ — объем всего шара. По формуле (36.15) момент инерции сферического слоя относительно диаметра равен $dI = \frac{2}{3} dm r^2 = 2m \frac{r^4 dr}{R^3}$. Интегрируя, получаем момент инерции сплошного шара

$$I = \frac{2}{5} mR^2. \quad (36.16)$$

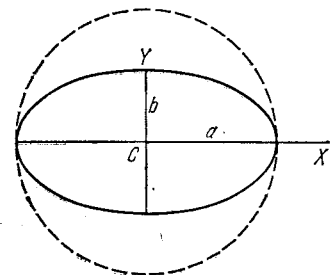


Рис. 70.

11. Момент инерции однородного эллипса. Предполагается, что масса равномерно распределена по площади эллипса. Эллипс можно получить из круга равномерным сжатием вдоль одного из его диаметров, например вдоль оси Y (рис. 70). При таком сжатии момент инерции относительно оси Y не меняется. Первоначально он был равен $\frac{1}{4} ma^2$ (a — радиус круга, сжатием которого получен эллипс, он равен длине большой полуоси эллипса). Аналогичное рассуждение применимо и для оси X . В результате получим

$$I_x = \frac{1}{4} mb^2, \quad I_y = \frac{1}{4} ma^2. \quad (36.17)$$

Момент инерции относительно оси Z , перпендикулярной к плоскости эллипса, найдется по формуле (36.4):

$$I_z = \frac{m}{4} (a^2 + b^2). \quad (36.18)$$

Формула (36.18) дает также момент инерции однородного эллиптического цилиндра относительно его продольной геометрической оси.

12. Момент инерции трехосного эллипсоида. Предполагается, что масса равномерно распределена по объему эллипсоида. Координатные оси X, Y, Z направим вдоль главных осей эллипсоида. Длины полуосей эллипсоида обозначим a, b, c . Вычислим момент инерции его относительно главной оси Z . Эллипсоид может быть получен из шара равномерным сжатием или растяжением по трем взаимно перпендикулярным направлениям, например по направлениям осей X, Y, Z . Возьмем однородный шар радиуса a . Его момент инерции $I_{ш} = \frac{2}{5}ma^2$. Произведем однородное сжатие в направлении оси Z , чтобы шар превратился в бесконечно тонкий круглый диск (конечно, с неравномерным распределением масс). Момент инерции I_z при этом остается неизменным, а моменты инерции I_x и I_y будут равны между собой ввиду симметрии. На основании соотношения (36.4) $I_x = I_y = \frac{1}{2}I_z = \frac{1}{5}ma^2$. Произведем затем равномерное сжатие круглого диска в направлении оси Y , чтобы его размеры в этом направлении сделались равными $2b$. При этом момент инерции I_y останется неизменным, а I_x делается равным $I_x = \frac{1}{5}mb^2$. Применяя снова соотношение (36.4), для момента инерции I_z полученного эллиптического диска найдем $I_z = I_x + I_y = \frac{1}{5}m(a^2 + b^2)$. Наконец, произведем равномерное растяжение эллиптического диска в направлении оси Z , чтобы он превратился в трехосный эллипсоид с полуосями a, b, c . При этом величина I_z не изменится. Таким образом, момент инерции трехосного эллипсоида относительно оси Z равен

$$I_z = \frac{m}{5}(a^2 + b^2). \quad (36.19)$$

Моменты инерции относительно остальных двух главных осей равны соответственно

$$I_x = \frac{m}{5}(b^2 + c^2), \quad I_y = \frac{m}{5}(c^2 + a^2).$$

§ 37. Уравнение моментов относительно движущегося начала и движущейся оси

1. Уравнение моментов (30.5) справедливо для того случая, когда начало O , относительно которого рассматриваются моменты L и M , неподвижно. Точно так же уравнение (32.2) относится к моментам относительно неподвижной оси. В некоторых случаях, однако, целесообразно рассматривать движущиеся начала или движущиеся оси. Исследуем, как меняется в этом случае уравнение моментов. Особый интерес представляют случаи, когда уравнение моментов относительно движущегося начала сохраняет прежний вид (30.5).

2. Рассмотрим сначала одну материальную точку. Будем понимать под \mathbf{v} и $\mathbf{p} \equiv m\mathbf{v}$ скорость и импульс этой точки относительно неподвижной инерциальной системы отсчета S , а под \mathbf{r} — ее радиус-вектор, проведенный из движущегося начала O . Движение начала O может быть как равномерным, так и неравномерным. Скорость этого движения обозначим через \mathbf{v}_O . Момент импульса движущейся точки относительно начала O определим прежним выражением (30.3), т. е. $L = [\mathbf{r}\mathbf{p}]$. Как и раньше, дифференцированием этого выражения найдем

$$\dot{L} = [\dot{\mathbf{r}}\mathbf{p}] + [\mathbf{r}\dot{\mathbf{p}}].$$