12. Момент инерции трехосного эллипсоида. Предполагается, что масса равномерно распределена по объему эллипсоида. Координатные оси X, Y, Z направим вдоль главных осей эллипсоида. Длины полуосей эллипсоида обозначим a, b, c. Вычислим момент инерции его относительно главной оси Z. Эллипсоид может быть получен из шара равномерным сжатием или растяжением по трем взаимно перпендикулярным направлениям, например по направлениям осей X, Y, Z. Возьмем однородный шар радиуса a. Его момент инерции $I_ш = {}^2/_5 ma^2$. Произведем однородное сжатие в направлении оси Z, чтобы шар превратился в бесконечно тонкий круглый диск (конечно, с неравномерным распределением масс). Момент инерции I_z при этом остается неизмененным, а моменты инерции I_x и I_y будут равны между собой ввиду симметрии. На основании соотношения (36.4) $I_x = I_y = {}^1/_2 I_z = {}^1/_5 ma^2$. Произведем затем равномерное сжатие круглого диска в направлении оси Y, чтобы его размеры в этом направлении сделались равными $2b$. При этом момент инерции I_y останется неизменным, а I_x сделается равным $I_x = {}^1/_5 mb^2$. Применяя снова соотношение (36.4), для момента инерции I_z полученного эллиптического диска найдем $I_z = I_x + I_y = {}^1/_5 m\,(a^2 + b^2)$. Наконец, произведем равномерное растяжение эллиптического диска в направлении оси Z, чтобы он превратился в трехосный эллипсоид с полуосями a, b, c. При этом величина I_z не изменится. Таким образом, момент инерции трехосного эллипсоида относительно оси Z равен

$$I_z = \frac{m}{5}(a^2 + b^2). \tag{36.19}$$

Моменты инерции относительно остальных двух главных осей равны соответственно

$$I_x = \frac{m}{5}(b^2 + c^2), \quad I_y = \frac{m}{5}(c^2 + a^2).$$

§ 37. Уравнение моментов относительно движущегося начала и движущейся оси

1. Уравнение моментов (30.5) справедливо для того случая, когда начало O, относительно которого рассматриваются моменты $\boldsymbol{L}$ и $\boldsymbol{M}$, *неподвижно*. Точно так же уравнение (32.2) относится к моментам относительно *неподвижной оси*. В некоторых случаях, однако, целесообразно рассматривать *движущиеся начала* или *движущиеся оси*. Исследуем, как меняется в этом случае уравнение моментов. Особый интерес представляют случаи, когда уравнение моментов относительно движущегося начала сохраняет прежний вид (30.5).

2. Рассмотрим сначала одну материальную точку. Будем понимать под $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{p} \equiv m\boldsymbol{v}$ скорость и импульс этой точки относительно неподвижной инерциальной системы отсчета S, а под $\boldsymbol{r}$ — ее радиус-вектор, проведенный из движущегося начала O. Движение начала O может быть как равномерным, так и неравномерным. Скорость этого движения обозначим через $\boldsymbol{v}_O$. Момент импульса движущейся точки относительно начала O определим прежним выражением (30.3), т. е. $\boldsymbol{L} = [\boldsymbol{rp}]$. Как и раньше, дифференцированием этого выражения найдем

$$\dot{\boldsymbol{L}} = [\dot{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{p}] + [\boldsymbol{r}\dot{\boldsymbol{p}}].$$

Однако теперь $\dot{\boldsymbol{r}}$ означает не скорость материальной точки $\boldsymbol{v}$, а разность между этой скоростью и скоростью движущегося начала $\boldsymbol{v}_O$. Таким образом,

$$\dot{\boldsymbol{L}} = [(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_O)\,\boldsymbol{p}] + [\boldsymbol{r}\dot{\boldsymbol{p}}],$$

или ввиду уравнения Ньютона $\dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{F}$ и коллинеарности векторов $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{p}$ $\dot{\boldsymbol{L}} = [\boldsymbol{rF}] - [\boldsymbol{v}_O\boldsymbol{p}]$, или, наконец,

$$\dot{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{M} - [\boldsymbol{v}_O\boldsymbol{p}]. \tag{37.1}$$

Чтобы обобщить это уравнение на случай системы материальных точек, напишем его для i-й материальной точки $\dot{\boldsymbol{L}}_i = \boldsymbol{M}_i + [\boldsymbol{v}_O\boldsymbol{p}_i]$, а затем просуммируем по всем i. Таким путем снова получим уравнение (37.1). Однако теперь $\boldsymbol{p}$ будет означать импульс *всей системы* материальных точек, а $\boldsymbol{M}$ — момент действующих на нее внешних сил.

Импульс $\boldsymbol{p}$ можно представить в виде $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}_C$, где $\boldsymbol{v}_C$ — скорость центра масс системы. Таким образом,

$$\dot{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{M} - m[\boldsymbol{v}_O\boldsymbol{v}_C]. \tag{37.2}$$

Это и есть *уравнение моментов относительно движущегося начала.*

Если движущееся начало O совпадает с центром масс C системы, то $\boldsymbol{v}_O = \boldsymbol{v}_C$, *и формула* (37.2) *переходит в прежнее уравнение* (30.5). *Уравнение моментов относительно центра масс имеет такой же вид, что и относительно неподвижного начала.* Более того, в этом случае скорости $\boldsymbol{v}$ материальных точек не обязательно рассматривать относительно неподвижной системы отсчета S. Их можно брать и относительно самого центра масс C, считая его как бы неподвижным. Если центр масс C движется прямолинейно и равномерно, то это утверждение непосредственно следует из принципа относительности. Но оно справедливо и в случае ускоренного движения центра масс. В самом деле, скорость каждой материальной точки может быть представлена в виде $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{v}_{\text{отн}}$, где $\boldsymbol{v}_{\text{отн}}$ — скорость точки относительно центра масс C. Поэтому

$$\boldsymbol{L} = \sum [\boldsymbol{r}m\boldsymbol{v}] = \sum [\boldsymbol{r}m\boldsymbol{v}_C] + \sum [\boldsymbol{r}m\boldsymbol{v}_{\text{отн}}].$$

Предпоследняя сумма в этом равенстве равна нулю. Действительно, так как скорость $\boldsymbol{v}_C$ одна и та же для всех слагаемых суммы, то ее можно вынести из-под знака суммы, что дает $-\left[\boldsymbol{v}_C \sum m\boldsymbol{r}\right] = -[\boldsymbol{v}_C\boldsymbol{r}_C] \sum m$, где $\boldsymbol{r}_C$ — радиус-вектор центра масс. Он равен нулю, так как начало координат O по условию помещено в центре масс. Итак,

$$\boldsymbol{L} = \sum [\boldsymbol{r}m\boldsymbol{v}_{\text{отн}}],$$

что и доказывает наше утверждение.

Второй, более общий, случай, когда уравнение (37.2) переходит в простую форму (30.5), получается тогда, когда скорости $\boldsymbol{v}_O$ и $\boldsymbol{v}_C$

коллинеарны. В этом случае векторное произведение $[\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_C]$ обращается в нуль. Таким образом, *когда скорость движущегося начала O параллельна скорости центра масс C, уравнение моментов принимает простую форму* (30.5). В этом случае, однако, при вычислении момента импульса $\boldsymbol{L}$ надо брать скорости всех материальных точек обязательно *относительно инерциальной системы отсчета S, а не относительно центра масс.*

3. Аналогичные результаты справедливы и для поступательно движущихся осей, когда при движении оси она все время остается параллельной своему исходному направлению. Нет необходимости формулировать эти результаты отдельно, так как уравнение моментов относительно оси получается из соответствующего уравнения моментов относительно точки путем проектирования на эту ось.

ЗАДАЧИ

1. Определить ускорения тел и натяжения нити на машине Атвуда, предполагая, что $m_2 > m_1$ (рис. 71). Момент инерции блока относительно геометрической оси равен I, радиус блока r. Массу нити считать пренебрежимо малой.

Решение. Ввиду того, что масса нити пренебрежимо мала, изменения натяжений T_1 и T_2 вдоль нити можно не учитывать. Уравнения движения грузов и блока будут

$$m_1a = T_1 - m_1g,$$
$$m_2a = m_2g - T_2,$$
$$I\frac{d\omega}{dt} = r(T_2 - T_1).$$

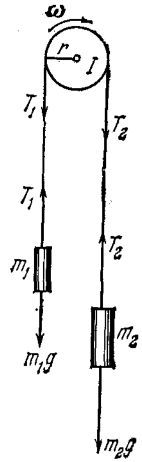

Рис. 71.

Если нет проскальзывания нити по блоку, то

$$r\frac{d\omega}{dt} = a.$$

Решая эти уравнения, получим

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{I}{r^2}}g,$$

после чего находим T_1 и T_2. Если масса блока пренебрежимо мала, то $T_1 = T_2$.

2. К шкиву креста Обербека (рис. 72) прикреплена нить, к которой подвешен груз массы $M = 1$ кг. Груз опускается с высоты $h = 1$ м до нижнего положения, а затем начинает подниматься вверх. В это время происходит «рывок», т. е. увеличение натяжения нити. Найти натяжение нити T при опускании или поднятии груза, а также оценить приближенно натяжение во время рывка $T_{рыв.}$. Радиус шкива $r = 3$ см. На кресте укреплены четыре груза с массой $m = 250$ г каждый на расстоянии $R = 30$ см от его оси. Моментом инерции самого креста и шкива пренебречь по сравнению с моментом инерции грузов. Растяжение нити во время рывка не учитывать.

Ответ. $T = \dfrac{Mg}{1 + \dfrac{Mr^2}{I}} = \dfrac{Mg}{1 + \dfrac{Mr^2}{4mR^2}} = 0{,}99T_0,$

где I — момент инерции системы, а T_0 — натяжение нити при неподвижном грузе. Среднее натяжение нити во время рывка $T_{рыв}$ можно оценить следующим образом. Надо вычислить максимальную скорость груза M в нижнем положении. Обозначим ее v. За время полоборота шкива $\Delta t = \frac{\pi r}{v}$ количество движения груза M меняется на $2Mv$. Это изменение равно импульсу силы, действующей на груз M, за то же время, т. е. $(T_{рыв} - Mg)\ \Delta t$. Вычисления дают $T_{рыв} = Mg + \frac{Mhr}{\pi m R^2} T \approx$ $\approx 1{,}42\ T_0$.

3. Монета массы m и радиуса r, вращаясь в горизонтальной плоскости вокруг своей геометрической оси с угловой скоростью ω, вертикально падает на горизонтальный диск и прилипает к нему. В результате диск приходит во вращение вокруг своей оси. Возникающий при этом момент сил трения в оси диска

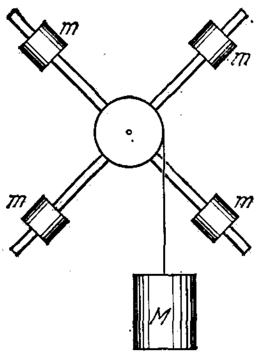

Рис. 72.

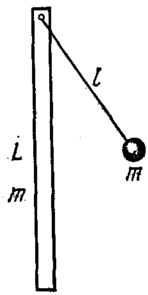

Рис. 73.

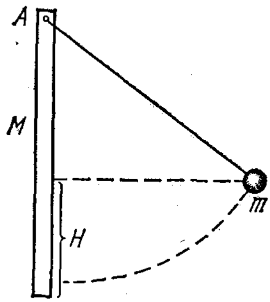

Рис. 74.

постоянен и равен M_0. Через какое время вращение диска прекратится? Сколько оборотов N сделает диск до полной остановки? Момент инерции диска относительно его геометрической оси I_0. Расстояние между осями диска и монеты равно d.

Ответ. $t = \frac{mr^2}{2M_0}\omega$; $N = \frac{M_0}{2I} t^2$, где $I = I_0 + m\left(d^2 + \frac{r^2}{2}\right)$.

4. Сплошной однородный короткий цилиндр радиуса r, вращающийся вокруг своей геометрической оси со скоростью n об/с, ставят в вертикальном положении на горизонтальную поверхность. Сколько оборотов N сделает цилиндр, прежде чем вращение его полностью прекратится? Коэффициент трения скольжения между основанием цилиндра и поверхностью, на которую он поставлен, не зависит от скорости вращения и равен k.

Ответ. $N = \frac{3\pi r n^2}{4kg}$.

5. Тонкий стержень массы m и длины L (рис. 73) подвешен за один конец и может вращаться без трения вокруг горизонтальной оси. К той же оси подвешен на нити длины l шарик такой же массы m. Шарик отклоняется на некоторый угол и отпускается. При какой длине нити шарик после удара о стержень остановится? Удар абсолютно упругий.

Ответ. $l = \frac{L}{\sqrt{3}}$.

6. Математический маятник массы m и стержень массы M (рис. 74) подвешены к одной и той же точке A, вокруг которой они могут свободно колебаться. Длина нити маятника равна длине стержня. Шарик маятника отклоняют в сторону, так что он приподнимается на высоту H относительно своего нижнего поло-

жения. Затем шарик отпускают, и он сталкивается неупруго с палкой. Как будут двигаться шарик и нижний конец палки после удара и на какие высоты они поднимутся?

Решение. Скорость шарика в нижнем положении до удара $v_0=\sqrt{2gH}$. Так как удар неупругий, то непосредственно после удара шарик и нижний конец стержня в нижнем положении будут иметь одну и ту же скорость v. Она найдется из закона сохранения момента импульса относительно оси A:

$$mlv_0=mlv+I\omega,$$

где $I={}^1/_3\,Ml^2$ — момент инерции стержня относительно той же оси. Так как $v=l\omega$, то написанное уравнение дает

$$v=\frac{ml^2}{I+ml^2}v_0=\frac{3m}{M+3m}v_0.$$

Теперь надо решить, будут ли шарик и стержень после столкновения двигаться вместе или при дальнейшем движении они разойдутся. С этой целью вычислим скорость шарика v_1 и нижнего конца стержня v_2 при поднятии на какую-то одну и ту же высоту h_1, если бы при этом они двигались независимо друг от друга. Эти скорости найдутся из уравнений сохранения энергии

$$v^2-v_1^2=2gh_1,\quad \frac{1}{2}\frac{I}{l^2}(v^2-v_2^2)=Mg\frac{h_1}{2}.$$

Преобразовав второе уравнение к виду

$$v^2-v_2^2=3gh_1,$$

видим, что $v_1>v_2$. Поэтому в любом положении шарик будет стремиться обогнать стержень. А так как шарик движется позади стержня, то он все время будет прижиматься к стержню. Отсюда следует, что после удара шарик и стержень будут подниматься как единое тело. Высоту поднятия h легко определить из закона сохранения энергии. Она равна

$$h=\frac{I+ml^2}{(M+2m)gl^2}v^2=\frac{6m^2}{(M+2m)(M+3m)}H.$$

7. Решить предыдущую задачу в предположении, что до удара был отклонен стержень (нижний конец его был поднят на высоту H).

Ответ. После удара шарик поднимается на высоту

$$h_1=\frac{3}{2}\left(\frac{M}{M+3m}\right)^2H,$$

нижний конец стержня — на высоту

$$h_2=\left(\frac{M}{M+3m}\right)^2H=\frac{2}{3}h_1.$$

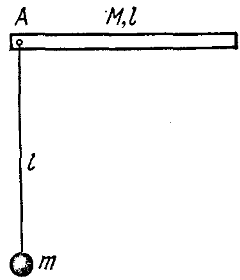

Рис. 75.

8. Твердый стержень длины l и массы M может вращаться вокруг горизонтальной оси A, проходящей через его конец (рис. 75). К той же оси A подвешен математический маятник такой же длины l и массы m. Первоначально стержень занимает горизонтальное положение, а затем отпускается. В нижнем положении происходит идеально упругий удар, в результате которого шарик и стержень деформируются, и часть кинетической энергии переходит в потенциальную энергию деформации. Затем деформация уменьшается, и запасенная потенциальная энергия вновь перехо-

дит в кинетическую. Найти значение потенциальной энергии деформации U в момент, когда она максимальна.

Ответ. $U = \frac{1}{2} \frac{ml^2}{I + ml^2} Mgl = \frac{3}{2} \frac{Mm}{M + 3m} gl$, где I—момент инерции стержня.

9. Вертикально висящая однородная доска длиной $L = 1{,}5$ м и массой $M = 10$ кг может вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через ее верхний конец. В нижний конец доски ударяет пуля, летящая горизонтально с начальной скоростью $V_0 = 600$ м/сек. Пуля пробивает доску и летит далее со скоростью V. Определить скорость V, если после выстрела доска стала колебаться с угловой амплитудой $\alpha = 0{,}1$ рад. Масса пули $m = 10$ г.

Ответ. $V = V_0 - \frac{M}{m} \sqrt{\frac{2}{3} gL} \sin \frac{\alpha}{2} = 444$ м/с.

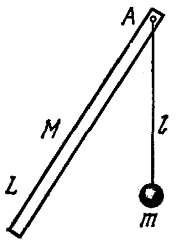

Рис. 76.

10. В общей точке подвеса A (рис. 76) подвешены шарик на нити длины l и однородный стержень длины L, отклоненный в сторону на некоторый угол. При возвращении стержня в положение равновесия происходит упругий удар. При каком соотношении между массами стержня M и шарика m шарик и точка удара стержня будут двигаться после удара с равными скоростями в противоположных направлениях? При каком соотношении между массами M и m описанный процесс невозможен?

Ответ. $ML^2 = ml^2$. Так как $L \geqslant l$, то для возможности процесса необходимо $M \leqslant m$. При $M > m$ процесс невозможен.

11. На горизонтальный диск, вращающийся вокруг геометрической оси с угловой скоростью ω_1, падает другой диск, вращающийся вокруг той же оси с угловой скоростью ω_2. Моменты инерции дисков относительно указанной оси равны соответственно I_1 и I_2. Оба диска при ударе сцепляются друг с другом (при помощи острых шипов на их поверхностях). На сколько изменится общая кинетическая энергия вращения системы после падения второго диска? Чем объясняется изменение энергии? Геометрические оси обоих дисков являются продолжением одна другой.

Ответ. Кинетическая энергия вращения уменьшится на

$$\Delta K = \frac{1}{2} \frac{I_1 I_2}{I_1 + I_2} (\omega_1 - \omega_2)^2.$$

12. Шкивы двух маховиков соединены ремнем (рис. 77). Радиусы шкивов равны R_1 и R_2. Моменты инерции маховиков относительно их геометрических

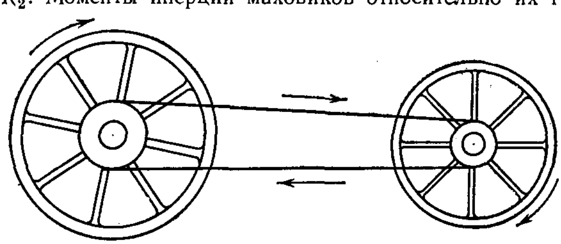

Рис. 77.

осей равны I_1 и I_2. Удерживая второй маховик и ремень неподвижными, раскручивают первый маховик до угловой скорости ω_0, вследствие чего между осью первого маховика и ремнем возникает скольжение. Затем ремень и второй маховик отпускают. Пренебрегая всеми силами трения, за исключением сил трения скольжения между ремнем и осями маховиков, найти установившиеся скорости вращения маховиков ω_1 и ω_2, т. е. скорости после прекращения скольжения. *Найти также потерю* ΔK кинетической энергии *на* трение скольжения. Массой ремня пренебречь.

Решение. Благодаря трению скольжения натяжения ремня сверху T_1 и снизу T_2 будут разными. Применяя к маховикам уравнение (33.4), получим

$$I_1 \frac{d\omega_1}{dt} = (T_1 - T_2) R_1, \qquad I_2 \frac{d\omega_2}{dt} = (T_2 - T_1) R_2.$$

Поделим эти уравнения соответственно на R_1 и R_2, сложим и проинтегрируем. Тогда получим

$$\frac{I_1\omega_1}{R_1} + \frac{I_2\omega_2}{R_2} = \text{const}.$$

Входящая сюда постоянная равна $I_1\omega_0/R_1$, так как в начальный момент $\omega_1 = \omega_0$, $\omega_2 = 0$. Когда скольжение прекратится, то $\omega_1 R_1 = \omega_2 R_2$. Решая полученную систему уравнений, найдем угловые скорости ω_1 и ω_2 после прекращения скольжения:

$$\omega_1 = \frac{I_1 R_2^2}{I_1 R_2^2 + I_2 R_1^2}\,\omega_0, \qquad \omega_2 = \frac{I_1 R_1 R_2}{I_1 R_2^2 + I_2 R_1^2}\,\omega_0.$$

Потеря кинетической энергии на трение равна

$$\Delta K = \frac{1}{2}\,\frac{I_1 I_2 R_1^2}{I_1 R_2^2 + I_2 R_1^2}\,\omega_0^2.$$

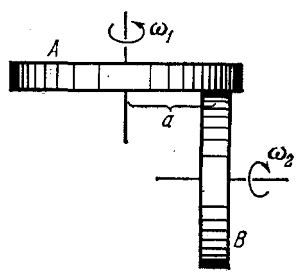

Рис. 78.

13. Почему в предыдущей задаче полный момент количества движения системы не сохраняется?

14. Однородный диск A массы M_1 и радиуса r_1 (рис. 78) раскручен до угловой скорости ω_0 и приведен в контакт с диском B, ось вращения которого перпендикулярна к оси диска A. Масса диска B равна M_2, а расстояние между точкой соприкосновения и осью диска A равно a. Найти установившиеся угловые скорости дисков ω_1 и ω_2 и потерю энергии в процессе установления. Трением в осях, а также трением качения пренебречь.

Ответ. $\omega_1 = \frac{M_1 r_1^2}{M_1 r_1^2 + M_2 a^2}\,\omega_0$, $\omega_2 = \frac{M_1 r_1^2}{M_1 r_1^2 + M_2 a^2}\,\frac{a}{r_2}\,\omega_0 = \frac{a}{r_2}\,\omega_1$.

Потеря энергии

$$\Delta K = \frac{M_1 M_2 r_1^2 a^2}{4\,(M_1 r_1^2 + M_2 a^2)}\,\omega_0^2.$$

15. Вертикальный столб высотой l подпиливается у основания и падает на землю, поворачиваясь вокруг нижнего основания. Определить линейную скорость его верхнего конца в момент удара о землю. Какая точка столба будет в этот момент иметь ту же скорость, какую имело бы тело, падая с той же высоты, как и данная точка?

Ответ. $v = \sqrt{3gl}$. Искомая точка находится на расстоянии $x = {}^2/_3 l$ от основания столба.

16. Изменится ли ответ в предыдущей задаче, если столб первоначально стоял в вертикальном положении на абсолютно гладком льду, а затем начал падать под действием силы тяжести? Чем будет отличаться движение столба в этом случае от движения в предыдущем случае?

Решение. По теореме Кёнига кинетическая энергия столба слагается из кинетической энергии движения его центра масс ${}^1/_2\, m v_C^2$ со скоростью v_C и кинетической энергии вращения ${}^1/_2\, I\omega^2$ вокруг центра масс с угловой скоростью ω.

За время падения центр масс проходит путь $l/2$. При этом совершается работа $mgl/2$, которая идет на приращение кинетической энергии:

$$\frac{mv_C^2}{2}+\frac{I\omega^2}{2}=\frac{mgl}{2}.$$

В нижнем положении, когда столб горизонтален, $v_C={}^1/_2\, l\omega$. Имея это в виду, а также используя выражение $I={}^1/_2\, ml^2$, получим $v_C={}^1/_2\sqrt{3gl}$. Скорость верхнего конца столба вдвое больше, т. е. равна $v=\sqrt{3gl}$. Отсюда видно, что результаты будут такими же, что и в предыдущей задаче. Однако характер движения будет другим. В предыдущем случае столб при падении вращался вокруг своего нижнего основания. При этом центр масс столба двигался по дуге окружности. В рассматриваемом случае, поскольку все действующие силы направлены вертикально, центр масс столба при его падении все время будет находиться на одной и той же вертикали.

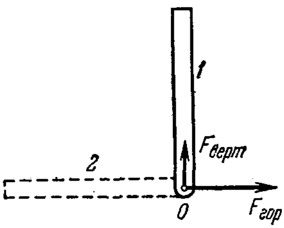

Рис. 79.

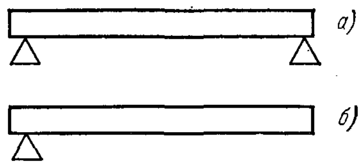

Рис. 80.

17. Однородный стержень массы m и длины l (рис. 79) падает без начальной скорости из положения 1, вращаясь без трения вокруг неподвижной горизонтальной оси O. Найти горизонтальную $F_{\text{гор}}$ и вертикальную $F_{\text{верт}}$ составляющие силы, с которыми ось O действует на стержень в горизонтальном положении 2.

Решение. Кинетическая энергия стержня в горизонтальном положении ${}^1/_2\, I\omega^2={}^1/_2\, mgl$. Центростремительное ускорение центра масс стержня в том же положении $\omega^2 l/2$. Отсюда по теореме о движении центра масс

$$F_{\text{гор}}=m\omega^2\frac{l}{2}=\frac{ml^2}{2I}mg=\frac{3}{2}mg.$$

Применив к вращению стержня в положении 2 уравнение (33.4), получим

$$I\frac{d\omega}{dt}=mg\frac{l}{2}.$$

Отсюда находим вертикальную составляющую ускорения центра масс в том же положении:

$$a=\frac{l}{2}\frac{d\omega}{dt}=\frac{mgl^2}{4I}=\frac{3}{4}g.$$

Далее,

$$ma=mg-F_{\text{верт}}.$$

В результате получится

$$F_{\text{верт}}=m(g-a)=\frac{1}{4}mg.$$

18. Абсолютно твердая однородная балка веса P лежит своими концами на двух абсолютно твердых опорах (рис. 80, *а*). Одну из них выбивают. Найти начальную силу давления, действующую на оставшуюся опору (рис. 80, *б*).

Ответ. $F={}^1/_4\, P$.

Когда балка лежала на двух опорах, на каждую из опор действовала сила $^1/_2\,P$. При быстром удалении одной из опор сила, действующая на оставшуюся опору, скачкообразно уменьшается вдвое. Такое скачкообразное изменение связано с идеализацией — балка и опора считаются абсолютно твердыми. Реальные балки и опоры деформируются. При учете этого обстоятельства нагрузка на опору F будет меняться непрерывно.

19. Гимнаст на перекладине выполняет большой оборот из стойки на руках, т. е. вращается, не сгибаясь, вокруг перекладины под действием собственного веса. Оценить приближенно наибольшую нагрузку F на его руки, пренебрегая трением ладоней о перекладину.

Ответ. $F=\left(1+\frac{4a^2m}{I}\right)mg$, где m — масса, I — момент инерции человека относительно перекладины, a — расстояние между осью вращения и центром масс человека. Если при оценке момента инерции моделировать человека однородным стержнем, вращающимся вокруг одного из его концов, то получится $F = 4mg$.

20. Человек на аттракционе «гигантские шаги» движется по замкнутой траектории таким образом, что достигаемая им высота относительно положения равновесия меняется в пределах от $h_{мин}$ до $h_{макс}$. Определить максимальную и минимальную скорости человека при таком движении, если длина веревки, на которой он удерживается, равна l.

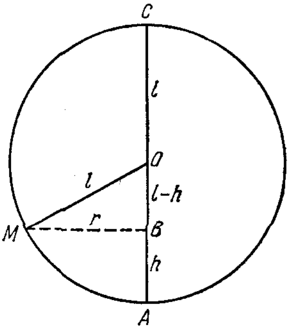

Рис. 81.

Решение. На основании закона сохранения энергии

$$v^2+2gh=\text{const}. \qquad (37.3)$$

Момент силы тяжести относительно точки подвеса не имеет вертикальной составляющей. Момент силы натяжения веревки равен нулю. Поэтому при движении человека вертикальная составляющая его момента количества движения остается неизменной. В положениях, где высота h максимальна или минимальна, скорость человека v горизонтальна, а момент количества движения равен mvr, где r — расстояние до вертикальной оси, вокруг которой вращается человек. Значит, в этих положениях величина vr одна и та же. В момент, когда высота h максимальна или минимальна, опишем в вертикальной плоскости окружность с центром в точке подвеса O, проходящую через точку нахождения человека M (рис. 81). По известной геометрической теореме $r^2 = AB\cdot BC$, или $r^2 = (2l - h)\,h$. Поэтому в положениях, где h максимальна и минимальна,

$$(2l-h)\,hv^2=\text{const}. \qquad (37.4)$$

Запишем соотношения (37.3) и (37.4) для этих положений, имея в виду, что максимуму h соответствует минимум v, и наоборот. Получим:

$$v^2_{макс}+2gh_{мин}=v^2_{мин}+2gh_{макс}, \qquad (2l-h_{мин})\,h_{мин}v^2_{макс}=(2l-h_{макс})\,h_{макс}v^2_{мин}.$$

Решая эти уравнения, получим

$$v^2_{макс}=\frac{2gh_{макс}\,(2l-h_{макс})}{2l-(h_{макс}+h_{мин})}, \qquad (37.5)$$

$$v^2_{мин}=\frac{2gh_{мин}\,(2l-h_{мин})}{2l-(h_{макс}+h_{мин})}. \qquad (37.6)$$

При этом учтено, что в реальных условиях $h < l$, так что величина (37.5) действительно максимальна, а (37.6) — действительно минимальна. Если $h_{макс}$ и $h_{мин}$ пренебрежимо малы по сравнению с l, то

$$v^2_{макс}=2gh_{макс}, \quad v^2_{мин}=2gh_{мин}. \qquad (37.7)$$

21. По внутренней поверхности конической воронки, стоящей вертикально, без трения скользит маленький шарик (рис. 82). В начальный момент шарик находился на высоте h_0, а скорость его v_0 была горизонтальна. Найти v_0, если известно, что при дальнейшем движении шарик поднимается до высоты h, а затем начинает опускаться. Найти также скорость шарика в наивысшем положении v.

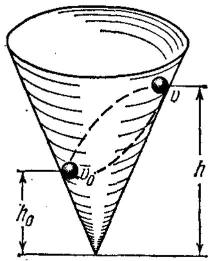

Рис. 82.

Ответ. $v_0^2 = \dfrac{2gh^2}{h+h_0}$, $v^2 = \dfrac{2gh_0^2}{h+h_0}$.

22. Тяжелая веревка (линейная плотность ρ) длины L перекинута через блок с моментом инерции и радиусом r. В начальный момент блок неподвижен, а больший из свешивающихся концов веревки имеет длину l. Найти угловую скорость вращения блока ω, когда веревка соскользнет с него. Веревка двигается по блоку без скольжения, трение в оси блока не учитывать.

Ответ. $\omega^2 = \dfrac{\rho g}{I + L\rho r^2}\left[L^2 + 4r^2 - l^2 - (L - l - \pi r)^2\right]$.

Указание. Воспользоваться законом сохранения энергии.

23. Метеорит массы $m = 10^5$ т, двигавшийся со скоростью $v = 50$ км/с, ударился о Землю на широте $\vartheta = 60°$. Вся его кинетическая энергия перешла в тепловую (внутреннюю) энергию, а сам он испарился. Какое максимальное влияние мог оказать удар такого метеорита на продолжительность суток?

Ответ. Максимальное изменение продолжительности суток ΔT, вызванное ударом метеорита, определяется формулой

$$\frac{\Delta T}{T} = \pm \frac{mvR\cos\vartheta}{2\pi I}\,T,$$

где $T = 86164$ с — продолжительность суток, $R = 6400$ км — радиус, $M = 6\cdot 10^{21}$ т — масса Земли, I — ее момент инерции. Если считать Землю однородным шаром, то $I = {}^2/_5\, MR^2$ (на самом деле из-за возрастания плотности к центру Земли момент инерции ее несколько меньше и составляет приблизительно $I = {}^1/_3\, MR^2$). В результате получится $\Delta T/T \sim 2\cdot 10^{-5}$, $\Delta T \sim 2\cdot 10^{-10}$ с.

24. Оценить, с какой минимальной скоростью v нужно выпустить на экваторе Земли снаряд массы $m = 1000$ т, чтобы изменить продолжительность земных суток на $\Delta T = 1$ мин?

Ответ. Наивыгоднейшим является выстрел в горизонтальном направлении в плоскости экватора. В этом случае

$$\frac{c-v}{c} \approx \frac{5}{18}\,\frac{m^2c^2T^4}{\pi^2 IM\,(\Delta T)^2} \approx \frac{25}{36}\,\frac{m^2c^2T^4}{\pi^2M^2R^2\,(\Delta T)^2} \approx 2\cdot 10^{-22},$$

где c — скорость света в вакууме. Остальные обозначения такие же, как в предыдущей задаче. Относительно приближенных вычислений см. § 22.

25. *Пульсарами* называются небесные объекты, посылающие импульсы радиоизлучения, следующие друг за другом с высокостабильными периодами, которые для известных к настоящему времени пульсаров лежат в пределах примерно от $3\cdot 10^{-2}$ до 4 с. Согласно современным представлениям пульсары представляют собой вращающиеся нейтронные звезды, образовавшиеся в результате гравитационного сжатия. Нейтронные звезды подобны гигантским атомным ядрам, построенным из одних только нейтронов. Плотность вещества ρ в нейтронной звезде не однородна, но при грубых оценках ее можно считать одной и той же по всему объему звезды и по порядку величины равной 10^{14} г/см³. Оценить период вращения T, с каким стало бы вращаться Солнце, если бы оно превратилось в нейтронную звезду. Плотность вещества Солнца возрастает к его центру, а различные слои его вращаются с различными скоростями. При оценке этими обстоятельствами пренебречь и считать, что средняя плотность солнечного вещества $\rho_0 = 1{,}41$ г/см³, а период вращения Солнца $T_0 = 2{,}2 \cdot 10^6$ с.

Ответ. $T \approx T_0 \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{2/3} = 1{,}3 \cdot 10^{-3}$ с.

26. Гладкий твердый стержень длины l_0 и массы M равномерно вращается с угловой скоростью ω_0 вокруг неподвижной оси, проходящей через один из концов стержня перпендикулярно к его продольной оси. На стержень надет шарик массы m. Вначале шарик находится на свободном конце стержня и вращается вместе с ним (упор, имеющийся на конце стержня, не позволяет шарику соскользнуть со стержня). В некоторый момент шарику сообщается скорость v, направленная вдоль стержня к оси вращения. Определить наименьшее расстояние l, до которого приблизится шарик к оси вращения, и угловую скорость системы ω в этом положении. В какую сторону будет изогнут стержень, когда шарик движется по направлению к оси вращения? Как изменится изгиб стержня, когда шарик, достигнув наименьшего удаления до оси, начнет двигаться в обратном направлении?

Ответ. $\omega = \omega_0 + \frac{mv^2}{\left(\frac{1}{3} M + m\right) l_0^2 \omega_0}$, $l = l_0 \sqrt{\frac{\omega_0}{\omega}}$. При приближении шарика к оси вращения стержень будет изгибаться в сторону, противоположную вращению. При удалении шарика изгиб стержня изменится в обратную сторону.

§ 38. Законы сохранения и симметрия пространства и времени

1. Закон сохранения энергии является следствием однородности времени, закон сохранения импульса — следствием однородности пространства, а закон сохранения момента импульса — следствием изотропии пространства. Такое утверждение встречается очень часто. Однако из-за своей краткости оно может привести к ошибочным представлениям. Можно подумать, что указанных свойств пространства и времени достаточно, чтобы вывести эти законы сохранения. А это неверно. Перечисленные законы сохранения являются следствиями второго закона Ньютона (или законов, ему эквивалентных), если его дополнить некоторыми утверждениями относительно действующих сил. Так, при выводе законов сохранения импульса и момента импульса достаточно предположить, что силы подчиняются *закону равенства действия и противодействия*. Но вместо этого закона можно воспользоваться и другими положениями. И утверждение, приведенное в начале этого параграфа, надо понимать в том смысле, что перечисленные в нем законы сохранения можно получить из *второго закона Ньютона, если к нему присоединить свойства симметрии пространства и времени, а именно: однородность пространства и времени, а также изотропию пространства*. Впрочем, при выводе закона сохранения энергии надо ввести и некоторые более специальные предположения относительно характера действующих сил.

2. Прежде чем приводить вывод законов сохранения, использующий однородность и изотропию пространства, а также однород-