тельствами пренебречь и считать, что средняя плотность солнечного вещества $\rho_0 = 1{,}41$ г/см³, а период вращения Солнца $T_0 = 2{,}2 \cdot 10^6$ с.

Ответ. $T \approx T_0 \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{2/3} = 1{,}3 \cdot 10^{-3}$ с.

**26.** Гладкий твердый стержень длины $l_0$ и массы $M$ равномерно вращается с угловой скоростью $\omega_0$ вокруг неподвижной оси, проходящей через один из концов стержня перпендикулярно к его продольной оси. На стержень надет шарик массы $m$. Вначале шарик находится на свободном конце стержня и вращается вместе с ним (упор, имеющийся на конце стержня, не позволяет шарику соскользнуть со стержня). В некоторый момент шарику сообщается скорость $v$, направленная вдоль стержня к оси вращения. Определить наименьшее расстояние $l$, до которого приблизится шарик к оси вращения, и угловую скорость системы $\omega$ в этом положении. В какую сторону будет изогнут стержень, когда шарик движется по направлению к оси вращения? Как изменится изгиб стержня, когда шарик, достигнув наименьшего удаления до оси, начнет двигаться в обратном направлении?

Ответ. $\omega = \omega_0 + \frac{mv^2}{\left(\frac{1}{3} M + m\right) l_0^2 \omega_0}$, $l = l_0 \sqrt{\frac{\omega_0}{\omega}}$. При приближении шарика к оси вращения стержень будет изгибаться в сторону, противоположную вращению. При удалении шарика изгиб стержня изменится в обратную сторону.

## § 38. Законы сохранения и симметрия пространства и времени

**1.** Закон сохранения энергии является следствием однородности времени, закон сохранения импульса — следствием однородности пространства, а закон сохранения момента импульса — следствием изотропии пространства. Такое утверждение встречается очень часто. Однако из-за своей краткости оно может привести к ошибочным представлениям. Можно подумать, что указанных свойств пространства и времени достаточно, чтобы вывести эти законы сохранения. А это неверно. Перечисленные законы сохранения являются следствиями второго закона Ньютона (или законов, ему эквивалентных), если его дополнить некоторыми утверждениями относительно действующих сил. Так, при выводе законов сохранения импульса и момента импульса достаточно предположить, что силы подчиняются *закону равенства действия и противодействия*. Но вместо этого закона можно воспользоваться и другими положениями. И утверждение, приведенное в начале этого параграфа, надо понимать в том смысле, что перечисленные в нем законы сохранения можно получить из *второго закона Ньютона, если к нему присоединить свойства симметрии пространства и времени, а именно: однородность пространства и времени, а также изотропию пространства*. Впрочем, при выводе закона сохранения энергии надо ввести и некоторые более специальные предположения относительно характера действующих сил.

**2.** Прежде чем приводить вывод законов сохранения, использующий однородность и изотропию пространства, а также однородность времени, необходимо точно сформулировать, какой смысл вкладывается в эти свойства пространства и времени.

Говорят часто, что однородность времени означает *равноправие всех моментов времени*. Однородность пространства означает, что в пространстве *нет выделенных положений*, все точки пространства *равноправны*. Аналогично, изотропия пространства характеризуется *отсутствием* в нем *выделенных направлений*, все направления в пространстве *эквивалентны*. Но такие формулировки слишком неопределенны и при буквальном понимании просто неверны. Направление к центру Земли, например, резко отличается от всякого горизонтального направления. Для альпиниста положения его у подножья и на вершине Эльбруса отнюдь не эквивалентны. Тело на вершине горы, представленное самому себе, может скатиться вниз. Но оно никогда не поднимется от подножья горы к ее вершине, если ему не сообщить надлежащей скорости. Точно так же для человека моменты времени, когда он молод, полон энергии и сил и когда он стар и находится на склоне лет, отнюдь не эквивалентны. Что же такое однородность времени, однородность и изотропия пространства?

*Однородность времени означает, что если в два любые момента времени все тела замкнутой системы поставить в совершенно одинаковые условия, то начиная с этих моментов все явления в ней будут протекать совершенно одинаково.*

*Однородность пространства означает, что если замкнутую систему тел перенести из одного места пространства в другое, поставив при этом все тела в ней в те же условия, в каких они находились в прежнем положении, то это не отразится на ходе всех последующих явлений.* В том же смысле надо понимать и изотропию пространства, только вместо переноса замкнутой системы надо говорить об ее *повороте* в пространстве на любой угол.

Здесь необходимо сделать такое же замечание, что и в § 15 в связи с принципом относительности Галилея. Нельзя понимать под замкнутой системой тел всю Вселенную. Если поступить так, то перечисленные свойства симметрии пространства и времени стали бы самоочевидными. Но они стали бы и бессодержательными. Ибо говорить о переносе или повороте системы тел можно только по отношению к каким-то другим телам. Речь идет не о всей Вселенной в целом, а о таких частях ее, которые можно рассматривать как (приближенно) *замкнутые системы*. Отсюда ясно, что свойства симметрии пространства и времени, о которых мы говорили, отнюдь не самоочевидны. На них надо смотреть как на *фундаментальные обобщения опытных фактов*.

**3.** После этих разъяснений обратимся к выводу закона сохранения энергии в механике. Из динамики мы заимствуем следствие второго закона Ньютона, выражающееся формулой

$$A_{12} = K_2 - K_1, \tag{38.1}$$

т. е. работа сил над механической системой равна приращению ее кинетической энергии $K$ (см. § 22). Следующую часть наших рассуждений проведем применительно к одной материальной точке. В случае системы материальных точек все будет обстоять так же, изменится только число аргументов, от которых зависит потенциальная функция $U$, вводимая ниже. Предположим, что проекции силы $F_x$, $F_y$, $F_z$, действующие на материальную точку, могут быть получены дифференцированием потенциальной функции $U$:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \qquad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \qquad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}.$$

Однако сама потенциальная функция $U$ может зависеть явно не только от координат $x$, $y$, $z$ рассматриваемой материальной точки, но и от времени $t$: $U = U(x, y, z, t)$. Например, это будет так, когда точка находится в силовом поле других тел, которое меняется во времени. Работа, производимая действующими силами над материальной точкой при перемещении ее вдоль некоторой кривой из положения *1* в положение *2*, представляется интегралом

$$A_{12} = -\int \left( \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \right),$$

взятым вдоль той же кривой. Прибавим и вычтем под знаком интеграла член $\frac{\partial U}{\partial t} dt$. Тогда, вводя полный дифференциал

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz + \frac{\partial U}{\partial t} dt,$$

представим предыдущее выражение в виде

$$A_{12} = -\int dU + \int \frac{\partial U}{\partial t} dt.$$

В таком виде оно справедливо и для системы материальных точек. Поэтому дальнейшие рассуждения не связаны с предположением, что система состоит из одной материальной точки. После интегрирования получаем

$$A_{12} = U_1 - U_2 + \int \frac{\partial U}{\partial t} dt. \tag{38.2}$$

Комбинация этой формулы с (38.1) приводит к соотношению

$$(K_2 + U_2) - (K_1 + U_1) = \int \frac{\partial U}{\partial t} dt. \tag{38.3}$$

До сих пор мы не использовали условие замкнутости системы и свойства однородности времени, поэтому наши рассуждения применимы и для незамкнутых систем. Допустим теперь, что система замкнута. Тогда ввиду однородности времени функция $U$ не может явно зависеть от времени, т. е. $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$. В результате получим

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2, \tag{38.4}$$

т. е. уравнение, выражающее механический закон сохранения энергии.

4. Перейдем к доказательству закона сохранения импульса. Допустим, что механическая система замкнута. Все силы $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, ..., действующие на материальные точки системы, являются силами внутренними, внешних сил нет. Перенесем систему из произвольного положения *1* в другое произвольное положение *2*, чтобы все материальные точки ее претерпели одно и то же смещение $\boldsymbol{r}$ и притом так, чтобы их скорости остались прежними по величине и направлению. Ввиду однородности пространства на такое перемещение не требуется затраты работы. Но эта работа представляется скалярным произведением $(\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \ldots)\,\boldsymbol{r}$. Значит, оно равно нулю, каково бы ни было смещение $\boldsymbol{r}$. Отсюда следует, что для замкнутой системы $\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \ldots = 0$. А это есть как раз то условие, при выполнении которого из второго закона Ньютона получается закон сохранения импульса (см. § 12).

5. Закон сохранения момента импульса для замкнутой системы доказывается в точности так же. Используя изотропию пространства, можно доказать, что геометрическая сумма моментов внутренних сил, действующих в системе, равна нулю: $\boldsymbol{M}_1 + \boldsymbol{M}_2 + \ldots = 0$ (см. задачу 2 к § 46). Отсюда немедленно следует рассмариваемый закон (см. § 30).

## ЗАДАЧИ

1. Пусть $U(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)$ означает потенциальную энергию взаимодействия двух материальных точек как функцию радиусов-векторов $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}_2$, определяющих их положения в пространстве. Используя однородность пространства, доказать, что $U$ является функцией только разности $\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$. Обобщить результат на случай системы $n$ взаимодействующих материальных точек.

Решение. Ввиду однородности пространства потенциальная энергия $U$ не изменится, если обе взаимодействующие точки сместить на один и тот же вектор $\boldsymbol{a}$. Записанное математически, это условие гласит: $U(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = U(\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{a}, \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{a})$. Это соотношение должно выполняться, каков бы ни был вектор $\boldsymbol{a}$. Полагая $\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{r}_1$, получим $U = U(0, \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)$, т. е. $U = f(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)$, где $f$ — какая-то функция только разности $\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$.

Если система состоит из $n$ взаимодействующих материальных точек, то, рассуждая аналогично, найдем

$$U = f(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1,\ \ldots).$$

Разумеется, вместо первой точки можно взять любую из материальных точек системы. Значит, потенциальная энергия $U$ может зависеть только от $n-1$ векторных аргументов: разностей радиусов-векторов каких-либо $n-1$ точек системы и радиуса-вектора остальной точки.

2. Какие дополнительные ограничения накладывает на вид функции $U$ изотропия пространства?

Ответ. Потенциальная энергия $U$ может зависеть только от расстояний каких-либо $n-1$ материальных точек системы от остальной точки.

3. Используя однородность пространства и галилеевский принцип относительности, показать, что сила взаимодействия материальных точек *1* и *2* не зависит от их координат и скоростей, а может зависеть только *от разностей* этих координат и скоростей.

Решение. В силу однородности пространства и галилеевского принципа относительности ускорение $\boldsymbol{a}$, а с ним и сила $\boldsymbol{f} = m\boldsymbol{a}$ инвариантны относительно переноса начала координат и преобразования Галилея. Возьмем две системы отсчета $S$ и $S'$. Рассматривая силу $\boldsymbol{f}$ как функцию координат и скоростей в системе $S'$, напишем $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}'_1, \boldsymbol{r}'_2, \boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2)$. Систему $S'$ можно выбрать произвольно. Выберем ее так, чтобы в рассматриваемый момент времени материальная точка 1 находилась в начале координат ($\boldsymbol{r}'_1 = 0$), а ее скорость равнялась нулю ($\boldsymbol{v}'_1 = 0$). Тогда в этот момент сила $\boldsymbol{f}$ будет функцией только двух аргументов: $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}'_2, \boldsymbol{v}'_2)$. Но разности координат и скоростей в обеих системах отсчета одинаковы, а потому $\boldsymbol{r}'_2 = \boldsymbol{r}'_2 - \boldsymbol{r}'_1 = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{v}'_2 = \boldsymbol{v}'_2 - \boldsymbol{v}'_1 = \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1$. В результате получим

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1).$$