если $\delta = -\pi/2$, то $x = A \sin \omega t$ и т. д. Таким образом, при гармоническом колебании абсцисса x является синусоидальной или косинусоидальной функцией времени t. Для графического изображения гармонического колебательного движения можно откладывать по горизонтальной оси время t, а по вертикальной оси — смещение точки x (рис. 22). Тогда получится периодическая кривая — *синусоида*. Форма кривой полностью определяется амплитудой A и циклической частотой ω. Однако ее положение зависит также от начальной фазы δ. По истечении времени

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{39.2}$$

фаза получает приращение 2π, а колеблющаяся точка возвращается в свое исходное положение с сохранением начального направления движения. Время T называется *периодом колебания*.

Скорость колеблющейся точки найдется дифференцированием выражения (39.1) по времени. Это дает

$$v = \dot{x} = -\omega A \sin(\omega t + \delta). \tag{39.3}$$

Дифференцируя вторично, получаем ускорение

$$a = \dot{v} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \delta), \tag{39.4}$$

или, используя (39.1),

$$a = -\omega^2 x. \tag{39.5}$$

Сила, действующая на материальную точку при гармоническом колебании, равна

$$F = ma = -m\omega^2 x. \tag{39.6}$$

Она пропорциональна отклонению x и имеет противоположное направление. Она всегда направлена к положению равновесия. Такого рода силы часто возникают при малых смещениях материальной точки из положения равновесия.

§ 40. Гармонические колебания груза на пружине

1. Рассмотрим спиральную пружину, один конец которой закреплен, а к другому подвешено тело массы m (рис. 84). Пусть l_0 — длина недеформированной пружины. Если пружину растянуть или сжать до длины l, то возникнет сила F, стремящаяся вернуть тело в положение равновесия. При небольших растяжениях $x = l - l_0$ справедлив *закон Гука* (1635—1703) — сила пропорциональна растяжению пружины: $F = -kx$. В этих условиях уравнение движения тела имеет вид

$$m\ddot{x} = -kx. \tag{40.1}$$

Постоянная k называется *коэффициентом упругости* или *жесткости* пружины. Знак минус означает, что сила F направлена в сторону, противоположную смещению x, т. е. к положению равновесия.

При выводе уравнения (40.1) предполагалось, что никакие другие силы на тело не действуют. Покажем, что тому же уравнению подчиняется движение тела, подвешенного на пружине в однородном поле тяжести. Обозначим в этом случае буквой X *удлинение пружины,* т. е. разность $X = l - l_0$. Пружина тянет груз вверх с силой kX, сила тяжести — вниз. Уравнение движения имеет вид

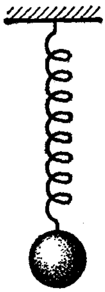

Рис. 84.

$$m\ddot{X} = -kX + mg.$$

Пусть X_0 означает удлинение пружины в положении равновесия. Тогда $-kX_0 + mg = 0$. Исключая вес mg, получим $m\ddot{X} = -k(X - X_0)$. Введем обозначение $x = X - X_0$, тогда уравнение движения примет прежний вид (39.1). Величина x по-прежнему означает смещение груза из положения равновесия. Однако положение равновесия смещается под действием силы тяжести. Кроме того, при наличии тяжести меняется смысл величины $-kx$. Теперь она означает равнодействующую сил натяжения пружины и веса груза. Но все это не затрагивает математическую сторону колебательного процесса. Поэтому можно рассуждать так, как если бы силы тяжести совсем не было. Так мы и поступим.

2. Результирующая сила $F = -kx$ имеет такой же вид, что и сила в выражении (39.6). Если положить $m\omega^2 = k$, то уравнение (40.1) перейдет в

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0. \qquad (40.2)$$

Это уравнение совпадает с уравнением (39.5). Функция (39.1) является решением такого уравнения при любых значениях постоянных A и δ. Можно доказать, что это есть *общее решение,* т. е. всякое решение уравнения (40.2) может быть представлено в виде (39.1). Различные решения отличаются друг от друга только значениями постоянных A и δ. (Доказательство приводится в конце этого параграфа.) Из изложенного следует, что груз на пружине будет совершать гармонические колебания с круговой частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (40.3)$$

и периодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \qquad (40.4)$$

Период колебаний T не зависит от амплитуды A. Это свойство называется *изохронностью* колебаний. Изохронность, однако, имеет место до тех пор, пока справедлив закон Гука. При больших растяжениях закон Гука нарушается. Тогда и колебания перестают быть изохронными, т. е. появляется зависимость периода колебаний от амплитуды.

Амплитуда A и начальная фаза δ не могут быть определены из дифференциального уравнения (40.2). Эти постоянные определяются начальными условиями, например начальными значениями смещения x и скорости $\dot{x}$. Дифференциальное уравнение (40.2) справедливо при любых начальных условиях. Оно описывает весь комплекс колебаний, которые может совершать рассматриваемая система. Конкретное колебание выделяется из этого комплекса заданием постоянных A и δ.

3. Потенциальная и кинетическая энергии тела даются выражениями

$$E_{\text{пот}} = \frac{1}{2} kx^2, \qquad E_{\text{кин}} = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m\dot{x}^2. \tag{40.5}$$

Каждая из них меняется во времени. Однако их сумма E во времени должна оставаться постоянной:

$$E = \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} m\dot{x}^2 = \text{const}. \tag{40.6}$$

Если воспользоваться выражением (39.1), то из формул (40.5) найдем

$$E_{\text{пот}} = \frac{1}{2} kA^2 \cos^2(\omega t + \delta), \qquad E_{\text{кин}} = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \delta),$$

или в силу соотношения (40.3)

$$E_{\text{кин}} = \frac{1}{2} kA^2 \sin^2(\omega t + \delta).$$

Эти формулы можно также записать в виде

$$E_{\text{пот}} = \frac{1}{4} kA^2 [1 + \cos 2(\omega t + \delta)], \quad E_{\text{кин}} = \frac{1}{4} kA^2 [1 - \cos 2(\omega t + \delta)].$$

Они показывают, что *кинетическая и потенциальная энергии в отдельности не остаются постоянными, а совершают гармонические колебания вокруг общего среднего значения* $^1/_4\, kA^2$ *с удвоенной круговой частотой* 2ω. Когда кинетическая энергия проходит через максимум, потенциальная обращается в нуль и обратно. Однако полная энергия $E = E_{\text{кин}} + E_{\text{пот}}$ остается постоянной и связана с амплитудой A соотношением

$$E = \frac{1}{2} kA^2. \tag{40.7}$$

Приведенное простое вычисление вместе с тем показывает, что выражение (39.1) является решением дифференциального уравнения (40.6) при условии, что частота ω определяется формулой (40.3), а амплитуда A — формулой (40.7). Таким образом, при заданной полной энергии E постоянная A не произвольна. Имеется лишь одна произвольная постоянная, определяемая начальными условиями, а именно начальная фаза δ. Для ее определения достаточно знать, например, либо начальное смещение, либо начальную скорость. Наличие в решении только одной произвольной постоянной связано с тем, что уравнение (40.6) — *первого порядка* по времени, в отличие от (40.2), которое является уравнением *второго порядка*. Впрочем, на энергию в уравнении (40.6) можно смотреть как на параметр, который может принимать любые положительные значения, определяющиеся начальными условиями. Тогда уравнение (40.6) становится полностью эквивалентным уравнению (40.2).

4. Все изложенное здесь применимо к гармоническим колебаниям любых механических систем с *одной степенью свободы*. Мгновенное положение механической системы с одной степенью свободы может быть определено с помощью какой-либо *одной* величины q, называемой *обобщенной координатой*, например угла поворота, смещения вдоль некоторой линии и пр. Производная $\dot{q}$ обобщенной координаты по времени называется *обобщенной скоростью*. При рассмотрении колебаний механических систем с одной степенью свободы за исходное удобнее брать не уравнение движения Ньютона, а *уравнение энергии*. Его обычно легче составлять. Кроме того, оно в известном смысле проще уравнения Ньютона, так как является дифференциальным уравнением *первого*, а не второго порядка по времени. Допустим, что механическая система такова, что ее потенциальная и кинетическая энергии выражаются формулами вида

$$E_{\text{пот}} = \frac{\alpha}{2} q^2, \quad E_{\text{кин}} = \frac{\beta}{2} \dot{q}^2, \tag{40.8}$$

где α и β — положительные постоянные (параметры системы). Тогда закон сохранения энергии приводит к уравнению

$$E = \frac{\alpha}{2} q^2 + \frac{\beta}{2} \dot{q}^2 = \text{const}. \tag{40.9}$$

Оно отличается от уравнения (40.6) только обозначениями, что при математическом рассмотрении не имеет значения. Из математической тождественности уравнений (40.6) и (40.9) следует, что и общие решения их одинаковы. Поэтому, *если уравнение энергии приводится к виду* (40.9), *то*

$$q = q_0 \cos(\omega t + \delta), \tag{40.10}$$

т. е. обобщенная координата q совершает гармоническое колебание с круговой частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}. \tag{40.11}$$

5. В заключение покажем, как можно найти общее решение дифференциального уравнения (40.2). Из этого уравнения прежде всего вытекает уравнение

энергии (40.6). Поэтому можно сразу исходить из уравнения (40.6). Используя соотношение (40.3), запишем это уравнение в виде

$$\omega^2 x^2 + \dot{x}^2 = \text{const}. \tag{40.12}$$

Левая часть этого соотношения существенно положительна, так как она равна сумме квадратов. Поэтому правую часть можно обозначить $\omega^2 A^2$, введя тем самым новую постоянную A. Тогда

$$\dot{x}^2 = \omega^2 (A^2 - x^2). \tag{40.13}$$

Так как $\dot{x}^2 \geqslant 0$, то $x \leqslant A$. Поэтому можно положить

$$x = A \cos \Theta, \tag{40.14}$$

где Θ — неизвестная функция времени t. Подставляя это выражение в уравнение (40.13), получим

$$\dot{x}^2 = \omega^2 A^2 (1 - \cos^2 \Theta) = \omega^2 A^2 \sin^2 \Theta,$$

откуда

$$\dot{x} = \pm\, \omega A \sin \Theta.$$

С другой стороны, дифференцируя выражение (40.14) по времени, находим

$$\dot{x} = -\dot{\Theta} A \sin \Theta.$$

Сравнение полученных выражений для x дает $\dot{\Theta} = \pm\omega$, откуда

$$\Theta = \pm\, \omega t + \delta,$$

где δ — произвольная постоянная. Таким образом,

$$x = A \cos (\pm\, \omega t + \delta).$$

Полученные выражения для x: $x_1 = A \cos (\omega t + \delta)$ и $x_2 = A \cos (-\omega t + \delta) = A \cos (\omega t - \delta)$ можно объединить в одно, так как δ — произвольная постоянная. Ее можно во втором выражении переобозначить, заменив на $-\delta$. Итак, в общем случае

$$x = A \cos (\omega t + \delta),$$

что совпадает с выражением (39.1).

§ 41. Физический маятник

1. *Физическим маятником* называется твердое тело, которое может качаться вокруг неподвижной горизонтальной оси. Точка пересечения ее A с вертикальной плоскостью, проходящей через центр масс маятника, называется *точкой подвеса маятника* (рис. 85). Положение тела в каждый момент времени можно характеризовать углом отклонения его из положения равновесия φ. Угол φ играет роль обобщенной координаты q. Кинетическая энергия качающегося физического маятника определяется выражением

$$E_{\text{кин}} = \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2,$$

где I — момент инерции маятника относительно оси A. Потенциальная энергия равна $E_{\text{пот}} = mgh$, где h — высота поднятия