

энергии (40.6). Поэтому можно сразу исходить из уравнения (40.6). Используя соотношение (40.3), запишем это уравнение в виде

$$\omega^2 x^2 + \dot{x}^2 = \text{const.} \quad (40.12)$$

Левая часть этого соотношения существенно положительна, так как она равна сумме квадратов. Поэтому правую часть можно обозначить $\omega^2 A^2$, введя тем самым новую постоянную A . Тогда

$$\dot{x}^2 = \omega^2 (A^2 - x^2). \quad (40.13)$$

Так как $\dot{x}^2 \geq 0$, то $x \leq A$. Поэтому можно положить

$$x = A \cos \Theta, \quad (40.14)$$

где Θ — неизвестная функция времени t . Подставляя это выражение в уравнение (40.13), получим

$$\dot{x}^2 = \omega^2 A^2 (1 - \cos^2 \Theta) = \omega^2 A^2 \sin^2 \Theta,$$

откуда

$$\dot{x} = \pm \omega A \sin \Theta.$$

С другой стороны, дифференцируя выражение (40.14) по времени, находим

$$\dot{x} = -\dot{\Theta} A \sin \Theta.$$

Сравнение полученных выражений для x дает $\dot{\Theta} = \pm \omega$, откуда

$$\Theta = \pm \omega t + \delta,$$

где δ — произвольная постоянная. Таким образом,

$$x = A \cos (\pm \omega t + \delta).$$

Полученные выражения для x : $x_1 = A \cos (\omega t + \delta)$ и $x_2 = A \cos (-\omega t + \delta) = A \cos (\omega t - \delta)$ можно объединить в одно, так как δ — произвольная постоянная. Ее можно во втором выражении переобозначить, заменив на $-\delta$. Итак, в общем случае

$$x = A \cos (\omega t + \delta),$$

что совпадает с выражением (39.1).

§ 41. Физический маятник

1. *Физическим маятником* называется твердое тело, которое может качаться вокруг неподвижной горизонтальной оси. Точка пересечения ее A с вертикальной плоскостью, проходящей через центр масс маятника, называется *точкой подвеса маятника* (рис. 85). Положение тела в каждый момент времени можно характеризовать углом отклонения его из положения равновесия φ . Угол φ играет роль обобщенной координаты q . Кинетическая энергия качающегося физического маятника определяется выражением

$$E_{\text{кин}} = \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2,$$

где I — момент инерции маятника относительно оси A . Потенциальная энергия равна $E_{\text{пот}} = mgh$, где h — высота поднятия

центра масс C над его самым нижним положением. Обозначим a расстояние между центром масс C и точкой подвеса A . Тогда

$$E_{\text{пот}} = mga(1 - \cos \varphi) = 2mga \sin^2 \frac{\varphi}{2}.$$

В случае малых колебаний синус угла $\varphi/2$ можно приближенно заменить самим углом. В этом приближении

$$E_{\text{пот}} = \frac{mga}{2} \varphi^2.$$

Таким образом, для малых колебаний потенциальная и кинетическая энергии приводятся к виду (40.8), причем $\alpha = mga$, $\beta = I$. Отсюда следует, что малые колебания физического маятника будут приблизительно гармоническими с циклической частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{mga}{I}} \quad (41.1)$$

и периодом

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mga}}. \quad (41.2)$$

Если период колебаний не зависит от амплитуды, то такие колебания называются *изохронными*. Мы видим, что *малые колебания физического маятника изохронны*. Колебания приблизительно изохронны, когда угловая амплитуда колебаний не превышает нескольких градусов. При больших амплитудах изохронность нарушается. На свойстве изохронности колебаний маятника основано его применение в часах.

Частным случаем физического маятника является *математический маятник*. Так называется маятник, вся масса которого практически сосредоточена в одной точке — в центре масс маятника C .

Примером математического маятника может служить шарик, подвешенный на длинной нити. В случае математического маятника $a = l$, $I = ml^2$, где l — длина маятника, и формула (41.2) переходит в

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (41.3)$$

Сравнивая формулы (41.2) и (41.3), заключаем, что *физический маятник колеблется так же, как математический маятник с длиной*

$$l = \frac{I}{ma}, \quad (41.4)$$

которая называется *приведенной длиной* физического маятника. Мы доказали это утверждение только для малых колебаний маятников. Но оно справедливо и для колебаний с конечными амплитудами,

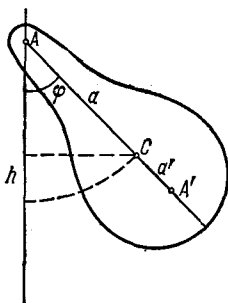


Рис. 85.

когда колебания не изохронны. Требуется только, чтобы угловые амплитуды физического и математического маятников были одинаковы. Доказательство этого мы предоставляем читателю.

2. Отложим от точки подвеса A вдоль прямой AC отрезок AA' , длина которого равна приведенной длине физического маятника l (см. рис. 85). Точка A' называется *центром качания*. *Центр качания можно определить как математическую точку, в которой надо сосредоточить всю массу физического маятника, чтобы период его колебаний остался без изменений*. По теореме Гюйгенса — Штейнера $I = I_C + ma^2$, где I_C — момент инерции маятника относительно параллельной оси, проходящей через центр масс C . Подставив это выражение в формулу (41.4), придадим ей вид

$$l = a + \frac{I_C}{ma}. \quad (41.5)$$

Отсюда следует, во-первых, что $l > a$, т. е. точка подвеса A и центр качания A' лежат по разные стороны от центра масс C и, во-вторых, что всем точкам подвеса, одинаково удаленным от центра масс маятника, соответствует одна и та же приведенная длина l , а следовательно, один и тот же период колебаний T .

Точка подвеса и центр качания являются *взаимными* или *сопряженными* точками в следующем смысле. *Если маятник подвесить за центр качания A' , то его период не изменится и прежняя точка подвеса A сделается новым центром качания*. Это положение называется *теоремой Гюйгенса*. Для ее доказательства обозначим a' длину отрезка $A'C$ и допустим, что маятник подвешен за точку A' . Тогда его приведенная длина будет

$$l' = a' + \frac{I_C}{ma'}.$$

Но $a' = l - a$, или в силу соотношения (41.5) $a' = I_C/(ma)$. Подставив это значение в предыдущую формулу, получим $l' = \frac{I_C}{ma} + a$. Таким образом, $l' = l$, т. е. приведенная длина, а с ней и период колебаний физического маятника остались без изменения. Это и доказывает теорему Гюйгенса.

3. Приведем другое доказательство теоремы Гюйгенса, глубже раскрывающее ее содержание. Будем перемещать точку подвеса маятника вдоль одной и той же прямой, проходящей через центр масс C . Посмотрим, как при этом будет меняться его период колебаний. Когда точка подвеса A бесконечно удалена от C , маятник ведет себя как математический. Его период колебаний бесконечно велик. При приближении точки подвеса A к центру масс C период колебаний сначала убывает. Когда точка подвеса совместится с C , маятник при любом отклонении будет в безразличном равновесии. Это значит, что его период колебаний снова становится бесконечно большим. Поэтому по мере приближения точки A к C убывание периода должно смениться возрастанием. Положению точки подвеса, где это происходит, соответствует минимальный период колебаний. Когда точка подвеса

переходит через точку C на другую сторону прямой AA' , период колебаний, перейдя через бесконечность, начинает уменьшаться. При этом двум положениям точки подвеса, находящимся по разные стороны от C на одинаковых расстояниях, соответствуют равные периоды колебаний.

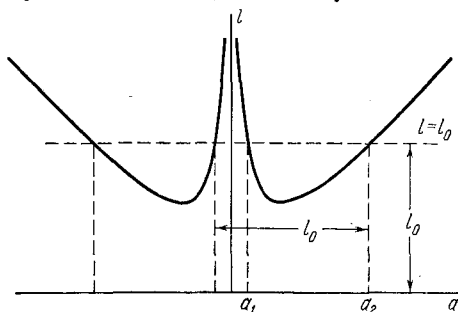


Рис. 86.

Вместо периода колебаний можно пользоваться приведенной длиной маятника l , однозначно определяющей его период колебаний. При удалении точки подвеса в бесконечность или при приближении ее к центру масс C приведенная длина l стремится к бесконечности и достигает минимума в каком-то промежуточном положении. Графически это представлено кривой на рис. 86. На оси абсцисс отложена величина a , на оси ординат — приведенная длина l маятника.

Кривая состоит из двух ветвей, симметрично расположенных относительно оси ординат. Одна ветвь соответствует случаю, когда точка подвеса расположена по одну, а вторая — по другую сторону от центра масс C . Аналитически кривая изображается уравнением (41.5), которое можно переписать в виде

$$a^2 - la + \frac{lC}{m} = 0. \quad (41.6)$$

Фиксированному значению приведенной длины l_0 соответствует на рис. 86 горизонтальная прямая $l = l_0$. Точки пересечения ее с кривой определяют положение точек подвеса физического маятника, при которых его приведенная длина равна заданному значению l_0 . Вообще говоря, таких точек пересечения четыре. Две из них расположены по одну, две остальные — по другую сторону от центра масс C . Их положение легко найти из квадратного уравнения

$$a^2 - l_0 a + \frac{l_0 C}{m} = 0. \quad (41.7)$$

Если $l_0 > 2\sqrt{l_0 C/m}$, это уравнение имеет два вещественных положительных корня a_1 и a_2 , причем

$$a_1 + a_2 = l_0. \quad (41.8)$$

В этом случае по одну и ту же сторону от центра масс C имеются две точки подвеса A_1 и A_2 (рис. 87), которым соответствует одна и та же приведенная длина l_0 . По другую сторону от центра масс C лежит вторая пара симметрично расположенных точек подвеса A'_1 и A'_2 , характеризующаяся той же приведенной длиной l_0 . Если $l_0 = 2\sqrt{l_0 C/m}$, корни уравнения (41.7) совпадают, т. е. обе точки подвеса по каждую сторону от центра масс сливаются в одну. Если

$l_0 < 2\sqrt{l_0 C/m}$, корни уравнения (41.7) — мнимые. Не существует точек подвеса, для которых приведенная длина была бы меньше $2\sqrt{l_0 C/m}$.

Теорема Гюйгенса теперь становится очевидной. Действительно, из соотношения (41.8) следует, что расстояние между точками A_1 и A'_2 , а также между точками A'_1 и A_2 равно приведенной длине маятника l . Если одну из точек каждой пары принять за точку подвеса, то вторая будет центром качания. Но это и есть

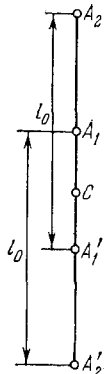


Рис. 87.

теорема Гюйгенса. Наше рассмотрение показывает также, что *точка подвеса и центр качания находятся по разные стороны от центра масс и расположены асимметрично относительно него. Исключение составляет только случай, когда $l_0 = 2\sqrt{I_C/m}$. Тогда точки A_1 и A_2 сливаются в одну точку. Сливаются также и точки A'_1 и A'_2 . В этом исключительном случае точка подвеса и центр качания расположены симметрично относительно центра масс.*

4. Теорема Гюйгенса используется в *оборотном маятнике* для точных измерений ускорения свободного падения. Существуют разнообразные конструкции оборотного маятника. На рис. 88 схематически изображена одна из них. Маятник состоит из стального стержня, длина которого обычно несколько больше метра. На нем жестко закреплены опорные стальные призмы A и A' и стальная чечевица B , находящаяся между ними. Другая стальная чечевица D находится на одном из концов стержня (не между призмами), она может перемещаться по стержню и закрепляться в нужном положении. Перемещением этой чечевицы достигают совпадения периодов колебаний маятника, когда точками подвеса являются ребра опорных призм A и A' . Эти ребра закреплены *асимметрично* относительно центра масс C . Поэтому при совпадении периодов колебаний расстояние между ними дает приведенную длину физического маятника l . Измерив период колебаний T , можно вычислить g по формуле (41.3).

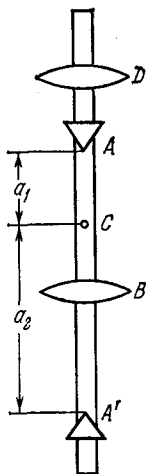


Рис. 88.

§ 42. Бифилярный и трифилярный подвесы

1. Найдем период малых колебаний *бифилярного подвеса*. Так называется устройство, состоящее из двух нитей AB и CD (рис. 89) одинаковой длины, на которых подвешено некоторое тело BD . Если тело повернуть вокруг вертикальной оси OO' , то оно начнет совершать крутильные колебания вокруг этой оси. Бифилярный подвес есть система с одной степенью свободы. В качестве координаты, определяющей ее мгновенное положение, удобно взять угол поворота φ тела BD вокруг оси OO' , отсчитывая этот угол от положения равновесия.

Кинетическая энергия системы равна $E_{\text{кин}} = \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2$, где I — момент инерции ее относительно оси OO' . Потенциальная энергия равна $E_{\text{пот}} = mgh$, где h — высота поднятия тела BD , отсчитываемая от его нижнего положения. Пусть l означает длину OO' в положении равновесия, $2a$ — расстояние между точками подвеса C и A , $2b$ — расстояние DB . Предполагается, что система симметрична, так что точки O и O' являются серединами отрезков CA и DB . Высота h найдется из условия нерастяжимости нитей AB и CD . Введем прямоугольную систему координат с началом в точке O , ось X направим вдоль прямой OA , ось Z — вниз вдоль прямой OO' ,

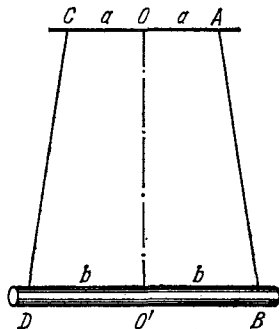


Рис. 89.