теорема Гюйгенса. Наше рассмотрение показывает также, что *точка подвеса и центр качания находятся по разные стороны от центра масс и расположены асимметрично относительно него. Исключение составляет только случай, когда* $l_0=2\sqrt{I_C/m}$. *Тогда точки* $A_1$ *и* $A_2$ *сливаются в одну точку. Сливаются также и точки* $A_1'$ *и* $A_2'$. *В этом исключительном случае точка подвеса и центр качания расположены симметрично относительно центра масс.*

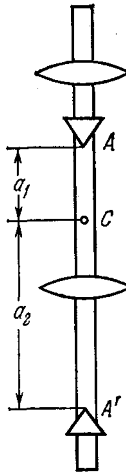

Рис. 88.

4. Теорема Гюйгенса используется в *оборотном маятнике* для точных измерений ускорения свободного падения. Существуют разнообразные конструкции оборотного маятника. На рис. 88 схематически изображена одна из них. Маятник состоит из стального стержня, длина которого обычно несколько больше метра. На нем жестко закреплены опорные стальные призмы $A$ и $A'$ и стальная чечевица $B$, находящаяся между ними. Другая стальная чечевица $D$ находится на одном из концов стержня (не между призмами), она может перемещаться по стержню и закрепляться в нужном положении. Перемещением этой чечевицы достигают совпадения периодов колебаний маятника, когда точками подвеса являются ребра опорных призм $A$ и $A'$. Эти ребра закреплены *асимметрично* относительно центра масс $C$. Поэтому при совпадении периодов колебаний расстояние между ними дает приведенную длину физического маятника $l$. Измерив период колебаний $T$, можно вычислить $g$ по формуле (41.3).

## § 42. Бифилярный и трифилярный подвесы

1. Найдем период малых колебаний *бифилярного подвеса*. Так называется устройство, состоящее из двух нитей $AB$ и $CD$ (рис. 89) одинаковой длины, на которых подвешено некоторое тело $BD$. Если тело повернуть вокруг вертикальной оси $OO'$, то оно начнет совершать крутильные колебания вокруг этой оси. Бифилярный подвес есть система с одной степенью свободы. В качестве координаты, определяющей ее мгновенное положение, удобно взять угол поворота $\varphi$ тела $BD$ вокруг оси $OO'$, отсчитывая этот угол от положения равновесия.

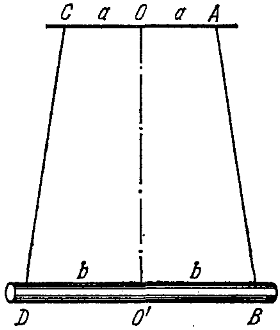

Рис. 89.

Кинетическая энергия системы равна $E_{\text{кин}} = {}^1/_2\, I\dot{\varphi}^2$, где $I$ — момент инерции ее относительно оси $OO'$. Потенциальная энергия равна $E_{\text{пот}} = mgh$, где $h$ — высота поднятия тела $BD$, отсчитываемая от его нижнего положения. Пусть $l$ означает длину $OO'$ в положении равновесия, $2a$ — расстояние между точками подвеса $C$ и $A$, $2b$ — расстояние $DB$. Предполагается, что система симметрична, так что точки $O$ и $O'$ являются серединами отрезков $CA$ и $DB$. Высота $h$ найдется из условия нерастяжимости нитей $AB$ и $CD$. Введем прямоугольную систему координат с началом в точке $O$, ось $X$ направим вдоль прямой $OA$, ось $Z$ — вниз вдоль прямой $OO'$, ось $Y$ — перпендикулярно к ним. Координаты точки $A$ все время остаются постоянными и равны

$$x_A = a, \qquad y_A = 0, \qquad z_A = 0.$$

Координаты точки $B$ в положении равновесия равны

$$x_B^{(0)} = b, \qquad y_B^{(0)} = 0, \qquad z_B^{(0)} = l.$$

При повороте системы на угол $\varphi$ координаты той же точки становятся равными

$$x_B = b\cos\varphi, \qquad y_B = b\sin\varphi, \qquad z_B = l - h.$$

Условие постоянства длины нити $AB$ можно записать в виде

$$(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2 = (x_B^0 - x_A^0)^2 + (y_B^0 - y_A^0)^2 + (z_B^0 - z_A^0)^2,$$

или

$$(b\cos\varphi - a)^2 + b^2\sin^2\varphi + (l - h)^2 = (b - a)^2 + l^2.$$

После простых преобразований отсюда находим

$$h = \frac{2ab\,(1 - \cos\varphi)}{2l + h} = \frac{4ab}{2l + h}\sin^2\frac{\varphi}{2}.$$

При малых колебаниях можно положить $\sin(\varphi/2) = \varphi/2$. Кроме того, $h \ll 2l$, и величиной $h$ в знаменателе можно пренебречь. В этом приближении

$$h = \frac{ab}{2l}\varphi^2, \quad E_{\text{пот}} = \frac{mgab}{2l}\varphi^2.$$

Таким образом, потенциальная и кинетическая энергии приводятся к виду (40.9), причем $\alpha = \dfrac{mgab}{l}$, $\beta = I$. Следовательно, колебания системы будут гармоническими с периодом

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{Il}{mgab}}. \tag{42.1}$$

Период колебаний пропорционален квадратному корню из момента инерции и обратно пропорционален квадратному корню из массы системы. Возьмем в качестве тела $BD$ металлический стержень. Выведем его из положения равновесия и заставим совершать крутильные колебания. Они будут сравнительно медленными. Прикрепим затем в точке $O'$ тяжелый груз и снова заставим систему колебаться. Колебания станут значительно более быстрыми. Дело в том, что груз прикреплен на оси вращения, а потому он, значительно увеличивая массу системы, практически не влияет на ее момент инерции. Уменьшение периода колебаний можно объяснить также следующим образом. В положение равновесия система возвращается под действием горизонтальных составляющих сил натяжения нитей. Подвешивая груз, мы сильно увеличиваем натяжение нитей, а момент инерции увеличивается незначительно. Это и приводит к тому, что колебания становятся более быстрыми.

2. Формулой (42.1) определяется также период колебаний *трифилярного подвеса* (трифиляра). Он схематически изображен на рис. 90. Точки подвеса $A$, $C$ и $M$ расположены на окружности радиуса $a$, точки $B$, $D$, $N$ — на окружности радиуса $b$. Нижний диск может совершать крутильные колебания вокруг вертикальной оси $OO'$. Вывод формулы (42.1) применим без всяких изменений и к трифилярному подвесу. Это видно уже из того, что при выводе было использовано

условие постоянства длины только одной нити $AB$. Постоянство длины другой нити $CD$ при этом условии выполняется автоматически.

Трифилярный подвес дает удобный метод измерения моментов инерции тел. Сначала измеряется период колебаний $T_0$ ненагруженного трифиляра. По этому периоду вычисляется его момент инерции

$$I_0=\frac{m_0 gab}{4\pi^2 l}T_0^2.$$

Затем на нижний диск трифиляра кладется тело массы $m$, момент инерции $I$ которого требуется измерить. Пусть $T$ — период крутильных колебаний нагруженного трифиляра. Тогда момент инерции системы относительно оси $OO'$ будет

$$I+I_0=\frac{(m+m_0)\,gab}{4\pi^2 l}T^2.$$

Вычитая отсюда предыдущее выражение, находим искомый момент инерции $I$.

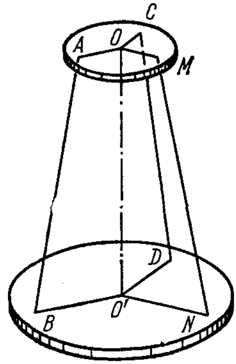

Рис. 90.

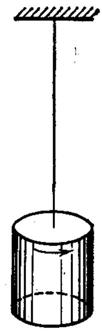
Рис. 91.

3. Укажем другой метод измерения моментов инерции, который во многих случаях является более предпочтительным. Подвесим тело на стальной проволоке, чтобы оно могло совершать крутильные колебания вокруг вертикальной оси, совпадающей с осью проволоки (рис. 91). При повороте тела на угол $\varphi$ проволока закручивается, и возникает момент сил $M$, стремящийся вернуть тело в положение равновесия. Опыт показывает, что момент $M$ в довольно широких пределах пропорционален углу $\varphi$: $M=-f\varphi$, где $f$ — постоянная для данной проволоки величина, называемая ее *модулем кручения*. Поэтому

$$I\ddot{\varphi}=-f\varphi.$$

Это уравнение математически тождественно уравнению (40.1). Значит, тело будет совершать гармонические крутильные колебания с периодом

$$T=2\pi\sqrt{\frac{I}{f}}. \tag{42.2}$$

Сняв первое тело, подвесим на той же проволоке другое тело с моментом инерции $I'$. Тогда период колебаний будет

$$T'=2\pi\sqrt{\frac{I'}{f}}.$$

Исключая неизвестный модуль кручения $f$, найдем

$$\frac{I}{I'}=\left(\frac{T}{T'}\right)^2.$$

Если один из моментов инерции, например $I$, известен, то по этой формуле может быть вычислен момент инерции $I'$ другого тела. Момент инерции $I$ можно вычислить теоретически по геометрическим размерам и массе тела. Для этого надо взять тело правильной геометрической формы, например цилиндр или шар. Формула (42.2) может быть использована также для экспериментального определения модуля кручения проволоки.

## ЗАДАЧИ

1. Материальная точка движется в поле тяжести по хорде круга без начальной скорости (рис. 92). Показать, что время ее движения из точки $A$ в нижнее положение $B$ не зависит от положения точки $A$ на окружности. (Этот факт был использован Галилеем для установления законов малых колебаний математического маятника. Для нахождения периода колебаний маятника Галилей заменил малую дугу окружности $ADB$, по которой движется материальная точка, хордой $AB$). Вычислить период колебаний маятника в этом приближении и убедиться, что оно приводит к правильной зависимости периода колебаний от длины маятника $l$ и ускорения силы тяжести $g$. Сравнить результат с правильной формулой (41.3).

Ответ. $T=8\sqrt{l/g}$.

2. Через неподвижный блок с моментом инерции $I$ (рис. 93) и радиусом $r$ перекинута нить, к одному концу которой подвешен груз массы $m$. Другой конец

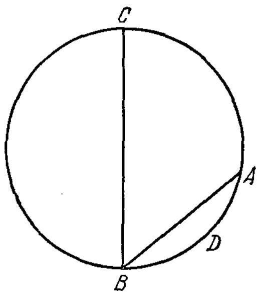

Рис. 92.

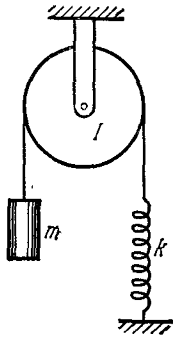

Рис. 93.

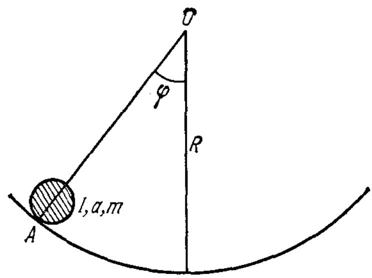

Рис. 94.

нити привязан к пружине с закрепленным нижним концом. Вычислить период колебаний груза, если коэффициент упругости пружины равен $k$, а нить не может скользить по поверхности блока.

Ответ. $T=2\pi\sqrt{\dfrac{I/r^2+m}{k}}$.

3. Физический маятник представляет собой однородный стержень длины $l$, подвешенный за один из его концов. Определить период колебаний такого маятника.

Ответ. $T=2\pi\sqrt{\dfrac{2l}{3g}}$.

4. Тело вращения радиуса $a$ с моментом инерции $I$ (относительно геометрической оси) и массой $m$ катается без скольжения по внутренней поверхности цилиндра радиуса $R$, совершая малые колебания около положения равновесия (рис. 94). Найти период этих колебаний.

Решение. Рассматривая движение тела как вращение вокруг мгновенной оси *) с угловой скоростью $\omega$, напишем для скорости его центра $v=\omega a$. Ту же скорость можно представить в виде $v=(R-a)\dot{\varphi}$. Приравнивая оба выражения, находим

$$\omega=\frac{R-a}{a}\dot{\varphi}.$$

*) Определение мгновенной оси см. в § 45.

Кинетическая энергия по теореме Кёнига

$$K=\frac{I}{2}\,\omega^2+\frac{m}{2}\,(R-a)^2\,\dot\varphi^2=\frac{1}{2}\left(m+\frac{I}{a^2}\right)(R-a)^2\,\dot\varphi^2.$$

Потенциальная же энергия

$$U=mg\,(R-a)\,(1-\cos\varphi)\approx\frac{mg}{2}\,(R-a)\,\varphi^2.$$

Применяя общий метод, изложенный в § 40, находим

$$T=2\pi\sqrt{\left(1+\frac{I}{ma^2}\right)\frac{R-a}{g}}\,.$$

В частности, для сплошного цилиндра и сплошного шара

$$T=2\pi\sqrt{\frac{3}{2}\,\frac{R-a}{g}},\qquad T=2\pi\sqrt{\frac{7}{5}\,\frac{R-a}{g}}.$$

5. На горизонтальной плоскости лежит цилиндр с моментом инерции $I$ (относительно продольной геометрической оси), массой $m$ и радиусом $r$. К оси цилиндра прикреплены две одинаковые горизонтально расположенные спиральные пружины, другие концы которых закреплены в стене (рис. 95, вид сверху).

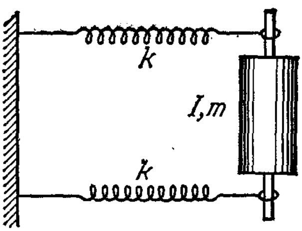


Рис. 95.

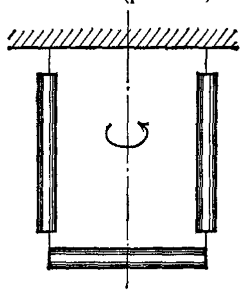

Рис. 96.

Коэффициент упругости каждой пружины равен $k$, пружины могут работать как на растяжение, так и на сжатие. Найти период малых колебаний цилиндра, которые возникнут, если вывести его из положения равновесия и дать возможность кататься без скольжения по горизонтальной плоскости.

Ответ. $T=\frac{2\pi}{r}\sqrt{\frac{I+mr^2}{2k}}$. Для сплошного цилиндра $T=\pi\sqrt{3m/k}$.

6. Однородная квадратная плита подвешена за свои углы к потолку зала на четырех параллельных веревках, длина каждой из которых равна $l$. Определить период малых крутильных колебаний плиты, которые возникнут, если повернуть ее на малый угол вокруг вертикальной оси.

Ответ. $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{3g}}$.

В более общем случае, когда плита не однородна, но центр масс ее совпадает с геометрическим центром плиты,

$$T=2\pi\sqrt{\frac{2Il}{Mga^2}},$$

где $I$ — момент инерции плиты относительно вертикальной оси, проходящей через ее центр, а $a$ — длина одной из сторон плиты.

7. Три однородных стержня длины $l$ каждый соединены короткими нитями, как указано на рис. 96. Нижний стержень поворачивают на малый угол вокруг

вертикальной оси, проходящей через центр системы, и отпускают. Найти период возникших при этом малых колебаний, если массы стержней одинаковы.

Ответ. $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{2g}}$.

8. Шарик массы $m$ подвешен на двух последовательно соединенных пружинках с коэффициентами упругости $k_1$ и $k_2$ (рис. 97). Определить период его вертикальных колебаний

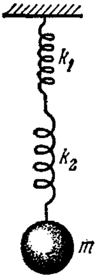

Рис. 97.

Ответ. $T=2\pi\sqrt{m\left(\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}\right)}$.

Указание. Показать, что при растяжениях и сжатиях пружины ведут себя как одна пружина с коэффициентом упругости, определяемым соотношением

$$\frac{1}{k}=\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}.$$

9. Найти период крутильных колебаний диска, плотно насаженного на составной стержень, состоящий из двух различных последовательно соединенных стержней (рис. 98). Верхний конец $A$ стержня неподвижно закреплен. Если бы диск был насажен только на первый стержень, то период колебаний был бы равен $T_1$. Если бы он был насажен только на второй стержень, то период колебаний оказался бы равным $T_2$.

Ответ. $T=\sqrt{T_1^2+T_2^2}$.

10. Найти период малых колебаний физического маятника массы $m$, к центру масс $C$ которого прикреплена горизонтальная спиральная пружина с коэффициентом упругости $k$. Другой конец пружины закреплен в неподвижной стенке

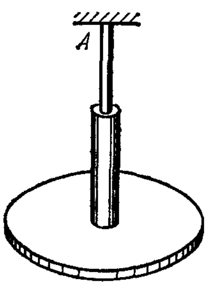

Рис. 98.

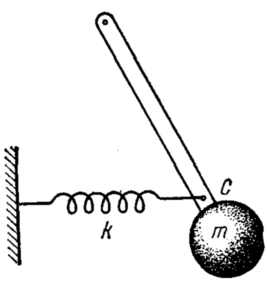

Рис. 99.

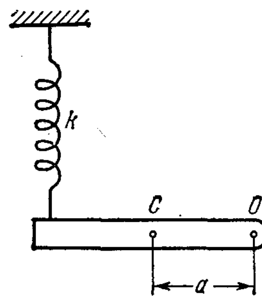

Рис. 100.

(рис. 99). *Момент инерции маятника относительно точки подвеса равен* $I$, расстояние между точкой подвеса и центром масс маятника равно $a$. В положении равновесия пружина не деформирована.

Ответ. $T=2\pi\sqrt{\frac{I}{mga+ka^2}}$.

11. Колебательная система состоит из однородного стержня длины $l$ и массы $m$, который может вращаться вокруг горизонтальной оси $O$, проходящей через его конец и перпендикулярной к продольной оси стержня (рис. 100). Другой конец стержня подвешен на пружине с коэффициентом упругости $k$. Расстояние между центром масс стержня и осью вращения $CO=a$. Момент инерции стержня относительно оси $O$ равен $I$. Найти удлинение пружины $x_0$ (по сравнению с ее длиной в недеформированном состоянии) в положении равновесия, если в этом положении

стержень горизонтален. Определить также период малых колебаний стержня около положения равновесия.

Ответ. $x_0 = \frac{mga}{kl}$, $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{kl^2}}$.

12. К концу однородного стержня длины $l$ и массы $m$ прикреплена короткая упругая пластинка. Пластинку зажимают в тисках один раз так, что стержень оказывается внизу, а другой раз — вверху (рис. 101). Определить отношение периодов малых колебаний стержня в этих случаях. Момент упругих сил пластинки пропорционален углу отклонения стержня от положения равновесия, причем коэффициент пропорциональности равен $k$.

Ответ. $\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{2k - mgl}{2k + mgl}}$.

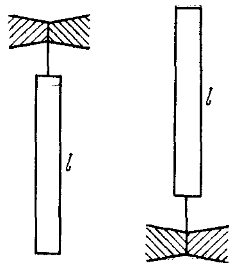

Рис. 101.

13. Два незакрепленных шарика с массами $m_1$ и $m_2$ соединены друг с другом спиральной пружинкой с коэффициентом упругости $k$. Определить период колебаний шариков относительно центра масс системы, которые возникнут при растяжении пружинки.

Ответ. $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)\,k}}$.

14. Два диска с моментами инерции $I_1$ и $I_2$ насажены на общую ось, проходящую через их центры. Осью является стержень с модулем кручения $f$. Определить период крутильных колебаний одного диска относительно другого в предположении, что система свободна. Массой стержня пренебречь.

Ответ. $T = 2\pi\sqrt{\frac{I_1 I_2}{f\,(I_1 + I_2)}}$.

15. Два сплошных однородных цилиндра одинакового радиуса $R$ с массами $m_1$ и $m_2$ лежат на горизонтальном столе и связаны с помощью двух одинаковых пружин с жесткостью $k$ каждая, как показано на рис. 102 (вид сверху). Определить период малых колебаний, которые возникнут, если растянуть пружины и предоставить систему самой себе, не сообщая ей дополнительной скорости. Цилиндры катаются по столу без проскальзывания. Пружины могут работать как на растяжение, так и на сжатие.

Ответ. $T = \pi\sqrt{\frac{3m_1 m_2}{k\,(m_1 + m_2)}}$.

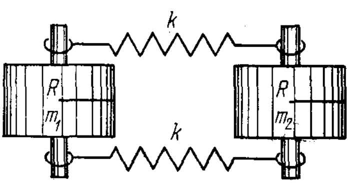

Рис. 102.

16. Колебания обычного математического маятника изохронны (точнее, приблизительно изохронны) только тогда, когда их амплитуды малы. Гюйгенс задался целью построить маятник, который совершал бы строго изохронные колебания при любых амплитудах. Он показал, что таковым является *циклоидальный маятник*. Циклоидальный математический маятник представляет собой материальную точку, совершающую колебания, двигаясь под действием силы тяжести по дуге циклоиды. Показать, что колебания циклоидального маятника изохронны, и вывести формулу для его периода.

Решение. Как известно, циклоида представляет собой кривую, описываемую одной из точек окружности, катящейся по неподвижной прямой. Для наших целей надо взять циклоиду, обращенную выпуклостью вниз. В соответствии с этим примем, что окружность расположена ниже горизонтальной прямой, по которой она катится (эта прямая на рис. 103 изображена пунктиром). За ось $X$ примем параллельную ей прямую, смещенную вниз на диаметр окружности $2a$.

Пусть точка $A$ на катящейся окружности, описывающая циклоиду, в исходном положении находится на оси $Y$ в наивысшей точке. Если окружность при качении повернется на угол $\varphi$, то ее центр $C$ переместится вправо на расстояние $a\varphi$. При этом точка $A$ сместится относительно центра влево на расстояние $a\sin\varphi$ и вниз на расстояние $a(1-\cos\varphi)$. Поэтому прямоугольные координаты точки $A$ станут

$$x=a(\varphi-\sin\varphi), \qquad y=a(1+\cos\varphi).$$

Это — уравнение циклоиды в параметрической форме. Пусть теперь $x$ и $y$ означают координаты материальной точки, совершающей циклоидальные колебания под действием силы тяжести. Параметр $\varphi$ становится функцией времени. Потенциальная энергия точки будет $U=mgy$, кинетическая $K=\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)$. Найдя производные $\dot{x}$, $\dot{y}$ и выполнив элементарные преобразования, получим

$$U=2mga\cos^2\frac{\varphi}{2}, \quad K=2ma^2\sin^2\frac{\varphi}{2}\cdot\dot{\varphi}^2.$$

Введем обозначение $q=\cos\frac{\varphi}{2}$. Тогда $\dot{q}=-\frac{1}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\cdot\dot{\varphi}$. Величина $q$ может быть принята за координату, определяющую положение колеблющейся точки, а ее производная $\dot{q}$ — за соответствующую обобщенную скорость. В этих обозначениях

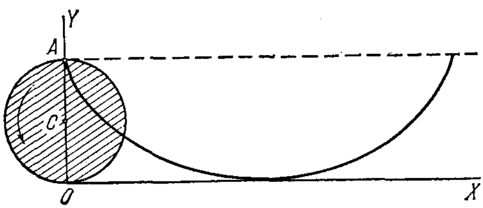


Рис. 103.

$$U=2mgaq^2, \qquad K=8ma^2\dot{q}^2.$$

Потенциальная энергия является квадратичной функцией координаты $q$, а кинетическая — производной $\dot{q}$ с постоянными коэффициентами. Отсюда заключаем, что при любых амплитудах колебания циклоидального маятника будут изохронными и гармоническими с периодом

$$T=2\pi\sqrt{\frac{4a}{g}}.$$

17. Маятник подвешен на резинке, растянутой настолько сильно, что ее первоначальной длиной можно пренебречь. Возможны ли горизонтальные гармонические изохронные колебания маятника сколь угодно большой амплитуды? Если возможны, то определить период этих колебаний. Возможны ли круговые движения маятника в вертикальной плоскости? Каково будет движение при любых начальных условиях?

Ответ. И те и другие движения возможны. Их период

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}},$$

где $m$ — масса маятника, а $k$ — коэффициент упругости резинки. При произвольных начальных условиях движение маятника будет происходить по эллипсу с периодом обращения $T$.

18. По штанге, вращающейся в горизонтальной плоскости с постоянной угловой скоростью $\omega$, может скользить без трения груз массы $m$, удерживаемый на некотором расстоянии от оси вращения пружиной с коэффициентом упругости $k$

и начальной длиной $r_0$. Найти движение груза, которое возникнет, если штангу мгновенно остановить.

Ответ. $r=r_0\left(1+\frac{\omega^2}{\omega_0^2-\omega^2}\cos\omega_0 t\right)$, где $\omega_0=\sqrt{k/m}$. При этом должно быть $\omega<\omega_0$. В противном случае груз на вращающейся штанге неограниченно удалялся бы от оси вращения, и равновесие, вопреки условию задачи, было бы невозможно.

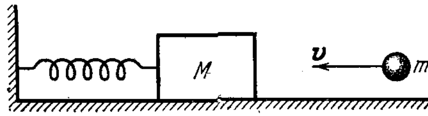

Рис. 104.

**19.** На горизонтальной пружине укреплено тело массы $M=10$ кг, лежащее на гладком столе, по которому оно может скользить без трения (рис. 104). В это тело попадает и застревает в нем пуля массы $m=10$ г, летящая с горизонтальной скоростью $v=500$ м/с, направленной вдоль оси пружины. Тело вместе с застрявшей в нем пулей отклоняется от положения равновесия и начинает колебаться относительно него с амплитудой $a=10$ см. Найти период колебаний тела.

Ответ. $T=2\pi\frac{M+m}{mv}a\approx 1{,}26$ с.

**20.** На тонкую стальную спицу надет шарик. Противоположный конец спицы неподвижно закреплен. Показать, что если масса спицы пренебрежимо мала по сравнению с массой шарика, то период малых колебаний, возникающих при отклонении шарика в сторону, пропорционален расстоянию $l$ между шариком и точкой закрепления спицы.

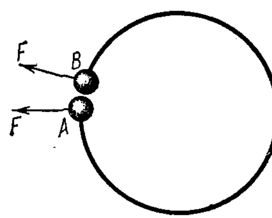

Рис. 105.

Указание. Рассмотрим вспомогательную однородную спицу, согнутую в кольцо. Если ее разрезать в одном месте и к концам прикрепить шарики $A$ и $B$, то появятся упругие радиальные силы $F$, приложенные к шарикам, стремящиеся распрямить спицу (рис. 105). Величина этих сил не зависит от места, где произведен разрез. Заметив это, вернемся теперь к нашей задаче. Если шарик сместить в сторону, то спица деформируется. При малых деформациях участок ее между шариком и точкой закрепления спицы можно в первом приближении считать дугой окружности. На основании предыдущего замечания можно утверждать, что при смещении шарика по этому деформированному участку величина действующей на него силы не будет меняться. Пользуясь этим, нетрудно показать, что коэффициент упругости $k$ спицы будет обратно пропорционален квадрату длины $l$.

**21.** Найти период колебаний физического маятника в зависимости от их угловой амплитуды.

Решение. Закон сохранения энергии дает

$$\frac{I}{2}\dot{\varphi}^2=mga(\cos\varphi-\cos\varphi_0),$$

где $\varphi$ — угол отклонения маятника из положения равновесия, а $\varphi_0$ — максимальное его значение (угловая амплитуда колебаний). Введя приведенную длину маятника (41.4) и выполнив несложные преобразования, получим

$$\frac{d\varphi}{dt}=2\sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{\sin^2\frac{\varphi_0}{2}-\sin^2\frac{\varphi}{2}}.$$

Разрешив это уравнение относительно $dt$ и интегрируя по $\varphi$, найдем период колебаний маятника $T$ как учетверенное время прохождения интервала углов от $\varphi = 0$ до $\varphi = \varphi_0$. При интегрировании удобно ввести новую переменную интегрирования $u = \sin(\varphi/2)/\sin(\varphi_0/2)$. В результате получим

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\pi/2}\frac{du}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}},$$

где введено обозначение $k \equiv \sin(\varphi_0/2)$. Входящий сюда интеграл не берется в элементарных функциях. Он называется полным *эллиптическим интегралом первого рода*. Его можно представить в виде бесконечного ряда. Так как $|k\sin u| < 1$, то подынтегральное выражение можно разложить в ряд по формуле бинома Ньютона:

$$(1-k^2\sin^2 u)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}k^2\sin^2 u + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}k^4\sin^4 u + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}k^6\sin^6 u + \ldots.$$

Этот ряд равномерно сходится, а потому его можно интегрировать почленно. Сделав это, получим

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\varphi_0}{2} + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\sin^4\frac{\varphi_0}{2} + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2\sin^6\frac{\varphi_0}{2} + \ldots\right].$$

При малых амплитудах $\varphi_0$ эта формула переходит в (41.3).

## § 43. Адиабатические инварианты

1. Энергия, импульс или момент импульса механической системы являются функциями ее координат и скоростей. Если система замкнута, то эти величины сохраняются, т. е. не меняются с течением времени. Если же система не замкнута, а параметры, определяющие ее состояние, изменяются во времени, то указанные величины, вообще говоря, также изменяются. Возьмем, например, математический маятник, нить которого перекинута через гвоздь. Параметрами здесь являются длина нити $l$ и ускорение свободного падения $g$. Можно тянуть за свободный конец нити, уменьшая или увеличивая $l$. При этом над маятником совершается внешняя работа, а потому энергия его изменяется. Можно также менять ускорение свободного падения, поднимая или опуская маятник над земной поверхностью. Среди различных изменений внешних параметров играют особую роль бесконечно медленные изменения, называемые *адиабатическими* *).

При этом параметры, сколь бы медленно они ни менялись, могут принимать любые значения, лежащие в допустимых пределах. Для изменения их на конечные величины требуется лишь достаточно длительное время. Изменения параметров системы, даже медленные, влекут за собой и изменения других физических величин. Так, энергия системы, как уже отмечалось, не остается постоянной, поскольку во время изменения параметров над системой произво-

---

*) В термодинамике термин «адиабатический» применяется в другом смысле. Адиабатическим называют процесс, происходящий без подвода и отвода тепла.