от $\varphi = 0$ до $\varphi = \varphi_0$. При интегрировании удобно ввести новую переменную интегрирования $u = \sin(\varphi/2)/\sin(\varphi_0/2)$. В результате получим

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\pi/2}\frac{du}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}},$$

где введено обозначение $k \equiv \sin(\varphi_0/2)$. Входящий сюда интеграл не берется в элементарных функциях. Он называется полным *эллиптическим интегралом первого рода*. Его можно представить в виде бесконечного ряда. Так как $|k\sin u| < 1$, то подынтегральное выражение можно разложить в ряд по формуле бинома Ньютона:

$$(1-k^2\sin^2 u)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}k^2\sin^2 u + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}k^4\sin^4 u + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}k^6\sin^6 u + \ldots$$

Этот ряд равномерно сходится, а потому его можно интегрировать почленно. Сделав это, получим

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\varphi_0}{2} + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\sin^4\frac{\varphi_0}{2} + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2\sin^6\frac{\varphi_0}{2} + \ldots\right].$$

При малых амплитудах φ_0 эта формула переходит в (41.3).

§ 43. Адиабатические инварианты

1. Энергия, импульс или момент импульса механической системы являются функциями ее координат и скоростей. Если система замкнута, то эти величины сохраняются, т. е. не меняются с течением времени. Если же система не замкнута, а параметры, определяющие ее состояние, изменяются во времени, то указанные величины, вообще говоря, также изменяются. Возьмем, например, математический маятник, нить которого перекинута через гвоздь. Параметрами здесь являются длина нити l и ускорение свободного падения g. Можно тянуть за свободный конец нити, уменьшая или увеличивая l. При этом над маятником совершается внешняя работа, а потому энергия его изменяется. Можно также менять ускорение свободного падения, поднимая или опуская маятник над земной поверхностью. Среди различных изменений внешних параметров играют особую роль бесконечно медленные изменения, называемые *адиабатическими* *).

При этом параметры, сколь бы медленно они ни менялись, могут принимать любые значения, лежащие в допустимых пределах. Для изменения их на конечные величины требуется лишь достаточно длительное время. Изменения параметров системы, даже медленные, влекут за собой и изменения других физических величин. Так, энергия системы, как уже отмечалось, не остается постоянной, поскольку во время изменения параметров над системой произво-

*) В термодинамике термин «адиабатический» применяется в другом смысле. Адиабатическим называют процесс, происходящий без подвода и отвода тепла.

дится работа. Но могут встречаться и такие величины, которые остаются постоянными или приблизительно постоянными из-за медленности изменения параметров.

Функции координат, скоростей и параметров системы, остающиеся постоянными при бесконечно медленных изменениях параметров, называются адиабатическими инвариантами. Это определение в дальнейшем будет уточнено, поскольку само понятие «медленности» нуждается в уточнении. Адиабатические инварианты играли большую роль в старой полуклассической теории атома Бора. Но они имеют важное значение и в других разделах физики.

2. Выясним понятие адиабатического инварианта сначала на простейшем, но важном примере гармонического осциллятора, собственная частота которого очень медленно изменяется во времени. Примером может служить математический маятник, медленно изменяющимися параметрами которого являются длина нити l и ускорение свободного падения g (точнее, их комбинация $\omega^2 = g/l$). Другим примером может служить колебание шарика на пружине, коэффициент упругости которой k является медленно меняющимся параметром. Все эти системы, называемые *гармоническими осцилляторами,* математически эквивалентны. Для конкретности будем иметь в виду шарик на пружине. Задача о математическом маятнике сводится к этому случаю, если ввести обозначение $k = mg/l$. Каким образом производится изменение коэффициента упругости или величин, ему эквивалентных, — это не имеет значения, пока задача трактуется как чисто математическая.

Полная энергия гармонического осциллятора равна

$$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2}.$$

Для ее производной по времени можно написать

$$\dot{E} = (mv\dot{v} + kx\dot{x}) + \frac{x^2}{2}\dot{k}.$$

Выражение в скобках обращается в нуль, так как $\dot{x} = v$, действующая сила $F = -kx$ и по закону Ньютона $m\dot{v} = F$. Введя еще потенциальную энергию $U = {}^1/_2 kx^2$, получим

$$\dot{E} = U(x)\frac{\dot{k}}{k}. \tag{43.1}$$

До сих пор наши вычисления были точными. Используем теперь *медленность изменения* параметра k и его производной $\dot{k}$. Медленность означает, что и при изменяющемся k движение по-прежнему будет носить характер колебаний. Только «период» этих колебаний T, а также положение крайних точек, достигаемых осциллятором, будут слегка меняться от колебания к колебанию. Иными словами, за каждое колебание параметр k должен изменяться очень мало.

Это обычное представление о медленности. Но в нашей задаче его недостаточно. Надо на изменения k и его производной наложить дополнительное ограничение, потребовав, чтобы за каждый период колебания величина $\dot{k}/k$ оставалась почти постоянной. Точнее, это требование сводится к тому, чтобы на каждом периоде колебания отношение $\dot{k}/k$ могло быть представлено в виде

$$\frac{\dot{k}}{k} = \left(\frac{\dot{k}}{k}\right)_0 [1+\alpha], \tag{43.2}$$

где $(\dot{k}/k)_0$ — значение этого отношения в какой-либо точке рассматриваемого периода, например, в его середине, а α — поправка, стремящаяся к нулю при $\dot{k} \to 0$. Имея это в виду, проинтегрируем выражение (43.1) в пределах от t до $t+T\,(k)$ для произвольного момента времени t. Получим

$$\Delta E = E\,(t+T) - E\,(t) = \left(\frac{\dot{k}}{k}\right)_0 \left[\int\limits_t^{t+T} U\,[x(t')]\,dt' + \beta\right]. \tag{43.3}$$

Здесь β — поправка, обращающаяся в нуль при $\dot{k} \to 0$. (Переменная интегрирования обозначена t', чтобы не смешивать ее с нижним пределом t.) Входящий сюда интеграл достаточно вычислить в нулевом приближении, т. е. считать при вычислении, что за время T параметр k не меняется. Возникающая вследствие этого ошибка в выражении для ΔE будет второго или высшего порядка малости по $\dot{k}$. По той же причине можно отбросить поправку β. Наконец, можно опустить индекс нуль в множителе перед интегралом $(\dot{k}/k)_0$. Иными словами, можно написать

$$\Delta E = \frac{\dot{k}}{k} \int\limits_t^{t+T} U\,[x\,(t')]\,dt', \tag{43.4}$$

где интеграл (но не множитель перед интегралом) вычисляется в предположении постоянства k. При вычислении интеграла момент времени t можно принять за начало отсчета времени, т. е. положить $t=0$. Это, конечно, не изменит результата. При $k = \text{const}$ координата x совершает гармонические колебания $x = x_0 \cos(\omega t + \delta)$, а потому

$$U = \frac{kx_0^2}{2}\cos^2(\omega t+\delta) = \frac{E}{2}[1+\cos(2\omega t+\delta)],$$

так как полная энергия равна $E = {}^1/_2\, kx_0^2$. Используя полученное выражение и выполняя интегрирование, получим

$$\int\limits_0^T U\,dt = \frac{E}{2}\int\limits_0^T [1+\cos(2\omega t+\delta)]\,dt = \frac{ET}{2}.$$

Произведение $T\dot{k}$ с точностью до величин высшего порядка малости по $\dot{k}$ дает приращение Δk параметра k за период T. Таким образом, вместо (43.4) можно написать

$$\Delta E = \frac{\Delta k}{2k} E. \tag{43.5}$$

Приращение Δk за период колебаний может быть сделано сколь угодно малым. Поэтому, если энергию E рассматривать как функцию параметра k, то в пределе приближенное соотношение (43.5) перейдет в точное дифференциальное уравнение

$$\frac{dE}{E} - \frac{dk}{2k} = 0.$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$\ln \frac{E}{\sqrt{k}} = \text{const},$$

а потому

$$\frac{E}{\sqrt{k}} = \text{const}. \tag{43.6}$$

Используя формулы (40.3) и (40.4), из этого соотношения получим еще два других:

$$ET = \text{const}, \tag{43.7}$$

$$\frac{E}{\omega} = \text{const}. \tag{43.8}$$

Эти соотношения означают, что *величины ET и E/ω для гармонического осциллятора являются адиабатическими инвариантами.* При этом *период колебания T и частота* ω, входящие в эти соотношения, *должны вычисляться так, как если бы при колебаниях параметр k оставался постоянным,* т. е. по формулам (40.3) и (40.4). Например, в случае медленного укорочения нити математического маятника, совершающего малые колебания, его период T медленно уменьшается от колебания к колебанию. Одновременно энергия колебаний возрастает таким образом, что произведение ET остается постоянным.

3. Для правильного понимания доказанной теоремы необходимо точно отдавать себе отчет, что́ понимается под медленностью изменения параметра осциллятора k. Недостаточно, чтобы изменения параметра k на каждом периоде колебаний были бесконечно малы. Надо, чтобы эти изменения удовлетворяли условию (43.2). Представим себе, например, что вблизи нижнего положения нить математического маятника действием внешних сил немного укорачивается, а вблизи крайних положений удлиняется, принимая исходное значение. Работа внешних сил при укорочении нити вблизи нижнего положения будет больше работы, производимой маятником над внешними полями при удлинении нити вблизи каждого край-

него положения. Причина этого в том, что при колебаниях маятника натяжение нити меняется, достигая максимума в нижнем положении. Поэтому за каждое колебание в систему дважды будет вкладываться энергия. И если число колебаний взять достаточно большим, то и прирост энергии можно сделать также большим, хотя длина маятника, а с ней и период T останутся неизменными. Колебания с периодически меняющимися параметрами называются *параметрическими*. Примером могут служить качели. К параметрическим колебаниям результаты (43.7) и (43.8) не применимы, сколь бы малыми ни были изменения параметра k в пределах каждого периода колебаний. Причина этого в том, что эти изменения не удовлетворяют условию (43.2). Грубо говоря, *условие (43.2) сводится к требованию, чтобы изменения параметра k происходили медленно и монотонно*. Так, в приведенном примере адиабатическая инвариантность выражений (43.7) и (43.8) будет иметь место, если длина нити изменяется медленно и монотонно. Если же на такие изменения наложить еще малые изменения колебательного характера, подобные тем, которые имеют место при параметрическом возбуждении колебаний, то к таким случаям теорема об адиабатической инвариантности выражений (43.7) и (43.8) не применима.

4. Полученные результаты можно обобщить на случай негармонических колебаний с одной степенью свободы, т. е. колебаний, совершающихся под действием не квазиупругих сил. В этом случае колеблющаяся величина меняется во времени не синусоидально, а как-то иначе. Период колебаний T определяется не только параметрами системы, но и их амплитудой. Вместо формулы (43.7) получается

$$\bar{K}T = \text{const}, \tag{43.9}$$

где $\bar{K}$ — кинетическая энергия системы, усредненная по времени за период колебания (черта как раз и означает такое усреднение), т. е.

$$\bar{K}(t) = \frac{1}{T}\int_{t}^{t+T} K(t')\,dt'. \tag{43.10}$$

В случае гармонических колебаний, как нетрудно доказать, средние за период значения кинетической и потенциальной энергий одинаковы, а потому на каждую из них приходится половина полной энергии, т. е. $\bar{K} = \bar{U} = {}^1/_2 E$. Тогда формула (43.9) переходит в ранее полученную формулу (43.7).

Подставим выражение (43.10) в формулу (43.9) и примем во внимание, что $K = {}^1/_2\, mv^2$, $p = mv$, $dq = v dt$, где dq — приращение координаты, определяющей положение материальной точки. Тогда получится

$$\oint p\,dq = \text{адиабатический инвариант}, \tag{43.11}$$

причем интегрирование ведется по полному периоду движения материальной точки в предположении, что параметры, характеризующие систему, закреплены. Общее доказательство соотношения (43.11) основано на уравнениях механики в форме Гамильтона. Мы его приводить не будем. Ограничимся только двумя примерами.

5. Первый пример. В цилиндре с гладкими стенками движется вверх и вниз идеально упругий шарик, последовательно отражающийся от основания AB и поршня CD по законам абсолютно упругого удара (рис. 106). Допустим сначала, что поля силы тяжести и прочих силовых полей нет. Заставим поршень CD очень медленно перемещаться со скоростью u. Исследуем, как это скажется на движении шарика. Перейдем в движущуюся систему отсчета, в которой поршень покоится. В этой системе скорость шарика будет $v-u$. После отражения шарика она сохранится по величине, но изменит знак, т. е. будет равна $-v+u$. В неподвижной системе отсчета та же скорость равна $(-v+u)+u=-v+2u$. Приращение кинетической энергии шарика в результате однократного отражения от движущегося поршня будет поэтому равно

$$\Delta K=\frac{m}{2}\left[(-v+2u)^2-v^2\right]=-2m\,(uv-u^2).$$

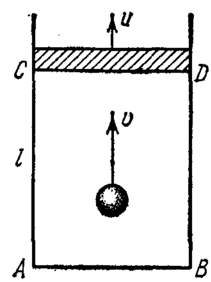

Рис. 106.

Разделив это соотношение на $K=\frac{1}{2}mv^2$ и пренебрегая квадратом малой скорости u, получим

$$\frac{\Delta K}{K}=-4\frac{u}{v}. \qquad (43.12)$$

Посмотрим теперь, как меняется период колебаний шарика T в результате движения поршня. Под периодом T мы понимаем время движения шарика туда и обратно, вычисленное в предположении, что во время такого движения поршень *вакреплен*. Если l — расстояние между поршнем и дном цилиндра во время этого движения, то $T=2l/v$. Спустя время T расстояние l возрастет на uT, а скорость шарика уменьшится на $2u$. Период колебаний в только что указанном смысле изменится и сделается равным

$$T'=\frac{2\,(l+uT)}{v-2u}=\frac{2\,(l+uT)\,(v+2u)}{v^2-4u^2},$$

или, пренебрегая квадратом малой скорости u,

$$T'=T+\frac{2uTv+4lu}{v^2}=T+4T\,\frac{u}{v}.$$

Таким образом, за время T период получает приращение

$$\Delta T=4T\,\frac{u}{v}=-T\,\frac{\Delta K}{K}.$$

В пределе, когда поршень движется бесконечно медленно, приращения ΔT и ΔK могут рассматриваться как бесконечно малые дифференциалы, и мы получаем уравнение

$$\frac{dT}{T}+\frac{dK}{K}=0.$$

Интегрируя его, находим

$$TK=\text{const}, \qquad (43.13)$$

т. е. *величина TK является адиабатическим инвариантом.*

6. **Второй пример.** Учтем теперь наличие силы тяжести. Пусть v_1 — скорость отразившегося шара в верхнем положении (рис. 107). На расстоянии x его скорость v определится соотношением $v^2 = v_1^2 + 2gx$. Интеграл (43.11) в рассматриваемом случае будет

$$J = 2m\int_0^l \sqrt{v_1^2 + 2gx}\, dx,$$

где l — расстояние между поршнем и дном цилиндра. *Интеграл надо вычислить в предположении, что поршень закреплен, т. е. при постоянном l.* Вычисление дает

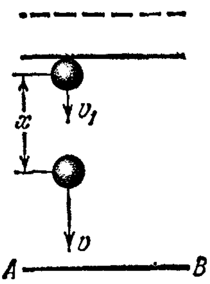

Рис. 107.

$$J = \frac{2m}{3g}\left(v_1^2 + 2gl\right)^{3/2} - v_1^3 = \frac{2m}{3g}\left(v_2^3 - v_1^3\right),$$

где v_2 — скорость шара в нижнем положении. Таким образом, надо доказать, что разность $v_2^3 - v_1^3$ является адиабатическим инвариантом. Для этого вычислим значение скоростей v_1 и v_2 спустя период T. Обозначим эти значения v_1' и v_2' соответственно. Разумеется, вычисление надо по-прежнему провести для неподвижного поршня, но переместившегося в новое положение. За время T поршень переместится вверх на расстояние uT. Шар пройдет это расстояние за время $\Delta T = uT/v_1$ (если пренебречь величинами более высокого порядка малости). При этом под действием силы тяжести его скорость уменьшится на $g\Delta T = g\,\frac{u}{v_1}\,T$. Кроме того, при отражении от движущегося поршня эта скорость дополнительно уменьшится на $2u$. Поэтому

$$v_1' = v_1 - \left(\frac{gT}{v_1} + 2\right)u = v_1 - 2\,\frac{v_2}{v_1}\,u,$$

так как

$$v_2 = v_1 + g\,\frac{T}{2}.$$

На уровне AB скорость шара будет $v_1'' = v_1 - 2u$, а около дна цилиндра

$$v_2'^2 = v_1''^2 + 2gl = (v_1 - 2u)^2 + 2gl = v_2^2 - 4v_1u,$$

если пренебречь квадратом u. Извлекая квадратный корень и снова пренебрегая u^2, получим

$$v_2' = v_2 - \frac{2v_1}{v_2}\,u.$$

С той же степенью точности

$$v_2'^3 = v_2^3 - 6v_1v_2u, \qquad v_1'^3 = v_1^3 - 6v_1v_2u.$$

Значит, $v_2'^3 - v_1'^3 = v_2^3 - v_1^3$ или $J' - J = 0$, причем это соотношение верно с точностью до членов порядка $u^2 = \dot{l}^2$. Разделив его на время T и отождествив частное $\frac{J' - J}{T}$ с производной $\frac{dJ}{dt}$, получим

$$\frac{dJ}{dt} = A\dot{l}^2,$$

где A от $\dot{l}$ не зависит. Имея в виду, что нас интересуют изменения величины J при *конечных изменениях* l, преобразуем это соотношение, введя вместо дифференциала времени дифференциал длины $dl = \dot{l}dt$. Тогда получится

$$\frac{dJ}{dl} = A\dot{l},$$

или в пределе при $\dot{l} \to 0$

$$\frac{dJ}{dl} = 0.$$

Следовательно, $J = \text{const}$, как бы велики ни были изменения параметра l, т. е. *величина J является адиабатическим инвариантом.* Такая адиабатическая инвариантность получилась благодаря тому, что производная $\frac{dJ}{dt}$ оказалась пропорциональной *второй,* а не первой степени $\dot{l}$. Если бы $\frac{dJ}{dt}$ была пропорциональна первой степени производной $\dot{l}$, то адиабатической инвариантности J не получилось бы.

ЗАДАЧИ

1. Шарик математического маятника или шарик, прикрепленный к пружине с заданным коэффициентом упругости, медленно испаряется (система с переменной массой). Будет ли величина ET адиабатическим инвариантом и почему?

Ответ. Нет.

2. Шарику массы m, надетому на тонкую стальную спицу, масса которой пренебрежимо мала по сравнению с m, сообщена продольная скорость в направлении к точке закрепления спицы, а также скорость в перпендикулярном направлении. Предполагая, что за период колебания шарика его смещение вдоль спицы мало по сравнению с ее длиной и пренебрегая трением, определить характер последующего движения шарика.

Решение. Если $v_\perp$ — поперечная скорость шарика, то величина $v_\perp^2 T$ является адиабатическим инвариантом. Период T пропорционален расстоянию l шарика от точки закрепления спицы (см. задачу 20 к § 42). Поэтому адиабатическим инвариантом будет также $A = v_\perp^2 l$. Кроме того, движение шарика подчиняется закону сохранения энергии, который требует, чтобы полная скорость шарика v сохранялась по абсолютной величине. Если $v_{||}$ — скорость шарика вдоль спицы, то $v^2 \equiv v_{||}^2 + v_\perp^2 = \text{const}$. Таким образом, величина $A = (v^2 - v_{||}^2)l$ есть адиабатический инвариант. На расстоянии l_0, при котором $v^2 l_0 = A$, продольная скорость $v_{||}$ обратится в нуль. Поэтому шарик не может подойти к точке закрепления ближе, чем на расстояние l_0. Достигнув положения $l = l_0$, он должен отразиться.