ГЛАВА VII

МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

* *

§ 44. Твердое тело в механике. Уравнения движения и равновесия твердого тела

1. В двух предыдущих главах уже говорилось о законах движения твердого тела и их применениях к некоторым простейшим движениям. В этой главе будет продолжено изучение избранных вопросов механики твердого тела.

Напомним, что *твердым телом* в механике называют неизменяемую систему материальных точек, т. е. такую идеализированную систему, при любых движениях которой взаимные расстояния между материальными точками системы остаются неизменными. Здесь, как и вообще в классической механике, под материальными точками понимают не атомы или молекулы, а достаточно малые макроскопические части, на которые мысленно можно разделить рассматриваемую механическую систему.

С атомистической точки зрения силы взаимодействия между материальными точками твердого тела являются силами *электрическими*. Но атомистический подход чужд феноменологической механике твердого тела. Последняя рассматривает твердое тело как *сплошную среду*, между различными элементами которой действуют внутренние силы в виде *нормальных* и *касательных напряжений*. Причиной их феноменологическая механика считает *деформации тел*. Если в теле совсем нет деформаций, то не может быть и внутренних напряжений. Однако если деформации, возникающие под действием внешних сил, малы и сами по себе нас не интересуют, то в ряде случаев от них можно отвлечься. Таким путем мы приходим к идеализированной модели тела, совершенно не способного деформироваться, хотя под действием внешних сил в нем и могут возникать внутренние натяжения и давления. Это и есть идеально твердое тело. Допустима или нет такая, как и всякая другая, идеализация — это определяется не только свойствами реальных тел, но и содержанием тех вопросов, на которые надо получить ответ.

2. Твердое тело является механической системой с шестью степенями свободы (см. § 8). Для описания его движения требуется шесть независимых числовых уравнений. Вместо них можно взять два независимых векторных уравнения. Таковыми являются уравнение движения центра масс

$$m\frac{dV}{dt}=\boldsymbol{F}_{\text{внеш}} \tag{44.1}$$

и уравнение моментов

$$\frac{dL}{dt}=\boldsymbol{M}_{\text{внеш}}. \tag{44.2}$$

Уравнение моментов можно брать относительно произвольного неподвижного начала или относительно центра масс твердого тела. Можно также брать произвольно движущееся начало, если только скорость его в любой момент времени параллельна скорости центра масс (см. § 37). При ограничении свободы движения число независимых уравнений, требующихся для описания движения твердого тела, уменьшается. Оно всегда равно числу степеней свободы.

В уравнения (44.1) и (44.2) входят только внешние силы. Внутренние силы не влияют на движение центра масс и не могут изменить момент импульса тела. Они могут изменять только взаимное расположение и скорости материальных точек тела. Но для абсолютно твердого тела такие изменения невозможны. Таким образом, внутренние силы не влияют на движение твердого тела. Если же сила внешняя, то точку приложения ее можно произвольно перемещать вдоль линии, по которой она действует. Действительно, при таком перемещении не меняются результирующая внешних сил $\boldsymbol{F}_{\text{внеш}}$ и их момент $\boldsymbol{M}_{\text{внеш}}$, т. е. уравнения движения (44.1) и (44.2) остаются без изменения. Подобное перемещение не допустимо в случае деформируемого тела, так как оно приводит к перераспределению деформаций и изменению внутренних движений тела.

3. Если твердое тело покоится, то уравнения (44.1) и (44.2) переходят в

$$\boldsymbol{F}_{\text{внеш}}=0, \qquad \boldsymbol{M}_{\text{внеш}}=0. \tag{44.3}$$

Это — *необходимые условия* равновесия твердого тела. Но они не являются достаточными. При их выполнении центр масс может еще двигаться прямолинейно и равномерно с произвольной скоростью, а само тело может вращаться с сохранением вращательного импульса. Так как при равновесии результирующая внешних сил $\boldsymbol{F}_{\text{внеш}}$ равна нулю, то момент этих сил $\boldsymbol{M}_{\text{внеш}}$ в состоянии равновесия не зависит от положения неподвижного начала O, относительно которого он берется [см. формулу (30.7)]. Поэтому при решении любой задачи на равновесие твердого тела начало O можно выбирать произвольно, что можно использовать для упрощения самого решения.

4. Не всегда можно заменять реальные твердые тела идеализированными абсолютно твердыми моделями даже в тех случаях, когда деформации пренебрежимо малы. В качестве примера рассмотрим задачу о равновесии твердой балки. Пусть однородная балка веса P лежит на двух опорах *1* и *2* (рис. 108). Центр масс балки находится посередине между опорами. Найдем силы F_1 и F_2, с которыми балка давит на опоры. Механика твердого тела дает два условия равновесия:

$$F_1+F_2=P, \qquad F_2 l=P\cdot\frac{l}{2}, \tag{44.4}$$

где l — расстояние между опорами. Второе из них означает, что должен обращаться в нуль момент действующих сил относительно опоры *1*. Из этих условий получаем $F_1=F_2=P/2$. Это — разумный результат. Деформации балки в рассматриваемой задаче не играют существенной роли. Идеализация абсолютно твердого тела допустима.

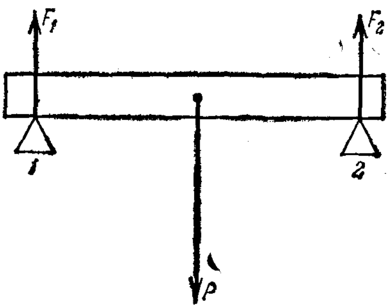

Рис. 108.

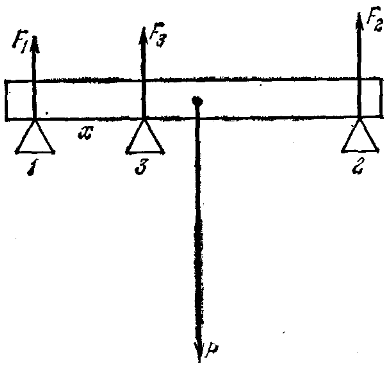

Рис. 109.

Рассмотрим теперь балку на трех опорах (рис. 109). Механика твердого тела по-прежнему дает два условия равновесия:

$$F_1+F_2+F_3=P, \qquad F_3x+F_2l=P\frac{l}{2}, \tag{44.5}$$

где l — расстояние между опорами *1* и *2*, а x — между опорами *1* и *3*. (Второе уравнение (44.5) получится, если приравнять нулю момент внешних сил относительно опоры *1*.) Двух уравнений недостаточно для определения трех неизвестных сил F_1, F_2, F_3. Одной из этих сил можно придать произвольное значение, тогда из уравнений (44.5) найдутся остальные две. Задача о распределении веса абсолютно твердой балки между тремя опорами, на которых она лежит, оказалась неопределенной. Механические системы, подобные абсолютно твердой балке на трех опорах, называют *статически неопределенными*.

Аналогичная ситуация встречается также в задаче о равновесии стола, стоящего на горизонтальной плоскости. Механика твердого тела дает в этом случае три независимых уравнения равновесия. Если число ножек стола три, то из этих трех уравнений можно однозначно определить три силы, с которыми ножки давят на плоскость опоры. Но если стол стоит на четырех ножках, то трех уравнений мало для определения четырех сил давления ножек на плоскость опоры. Идеально твердый стол с четырьмя ножками, стоящий на идеально твердой горизонтальной плоскости, является также статически неопределенной системой.

Конечно, вес реальной балки, лежащей на трех опорах, вполне определенным образом распределяется между ними. Точно так же вполне определенным образом распределяется сила давления реального стола между четырьмя ножками, на которых он стоит. Неопределенность, к которой мы пришли, указывает просто на то, что в рассматриваемых задачах балку на трех опорах или стол на четырех ножках *нельзя считать идеально твердыми*. Надо учитывать их деформации, а также деформации опор.

5. Следующее простое рассуждение выясняет, почему деформации могут оказаться существенными. Допустим, что идеально твердая балка лежит на трех опорах (см. рис. 109). Сместим среднюю опору немного вниз. Так как идеально твердая балка не может деформироваться, то между ней и опорой *3* сразу же возникнет зазор — балка перестанет опираться на опору *3* и давить на нее. Сила давления на опору *3* скачком обратится в нуль, а вес балки вполне определенным образом и тоже скачком распределится между оставшимися опорами *1* и *2*. То же произойдет, если у твердого стола бесконечно мало укоротить одну из четырех ножек. Не то будет в случае реальной балки или реального стола. При бесконечно малом опускании опоры *3* балка прогнется и по-прежнему будет на нее опираться. Сила давления на опору *3* не обратится в нуль, а уменьшится бесконечно мало. Аналогично, когда стол стоит на четырех ножках, то все ножки деформируются, укорачиваясь под действием силы веса. Если подпилить одну из ножек, укоротив ее бесконечно мало, то деформация ножки уменьшится, ножка удлинится и снова будет касаться плоскости опоры. Таким образом, и в этом случае давление на ножку изменяется бесконечно мало, т. е. непрерывно.

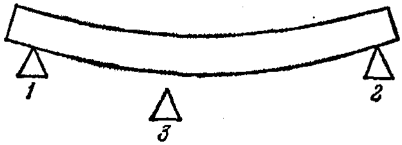

Рис. 110.

Допустим теперь, что реальная балка лежит на двух опорах, *1* и *2* (рис. 110). Под действием силы веса балка прогнется. Будем подводить под балку третью опору *3*, непрерывно поднимая ее. Как только опора *3* коснется балки, с балкой не произойдет еще никаких изменений. Но дальнейшее поднятие опоры *3* будет связано с выпрямлением балки, а для этого опора должна действовать на балку с некоторой силой. По мере поднятия опоры *3* эта сила будет непрерывно возрастать, принимая вполне определенное значение при каждом положении опоры *3*. Приведенное рассуждение ясно показывает, почему при решении задачи о распределении веса балки между тремя опорами надо учитывать ее упругие свойства. Эта задача будет решена в гл. X (см. задачу 3 к § 80). Аналогичное рассуждение можно провести и для стола на четырех ножках.

§ 45. Мгновенная ось вращения

1. Пусть твердое тело вращается вокруг неподвижной оси. Чтобы получить представление о распределении скоростей в нем, достаточно рассмотреть движение точек тела, лежащих в какой-либо одной плоскости, перпендикулярной к оси вращения. Это значит, что тело можно считать как бы плоским. Соответствующее распределение скоростей показано на схематическом рис. 111. Точка O тела, через которую проходит ось вращения, неподвижна. Все другие точки тела движутся по окружностям с центром в O. Их скорости пропорциональны радиусам соответствующих окружностей. Величины скоростей могут меняться с течением времени, но ось вращения остается одной и той же.

2. Рассмотрим теперь более общее движение плоского твердого тела. Плоскость вращения совпадает с плоскостью самого тела. Никакой неподвижной оси, вокруг которой происходило бы вращение тела, не предполагается. Если A и B — две произвольные