четырех ножках *нельзя считать идеально твердыми*. Надо учитывать их деформации, а также деформации опор.

5. Следующее простое рассуждение выясняет, почему деформации могут оказаться существенными. Допустим, что идеально твердая балка лежит на трех опорах (см. рис. 109). Сместим среднюю опору немного вниз. Так как идеально твердая балка не может деформироваться, то между ней и опорой *3* сразу же возникнет зазор — балка перестанет опираться на опору *3* и давить на нее. Сила давления на опору *3* скачком обратится в нуль, а вес балки вполне определенным образом и тоже скачком распределится между оставшимися опорами *1* и *2*. То же произойдет, если у твердого стола бесконечно мало укоротить одну из четырех ножек. Не то будет в случае реальной балки или реального стола. При бесконечно малом опускании опоры *3* балка прогнется и по-прежнему будет на нее опираться. Сила давления на опору *3* не обратится в нуль, а уменьшится бесконечно мало. Аналогично, когда стол стоит на четырех ножках, то все ножки деформируются, укорачиваясь под действием силы веса. Если подпилить одну из ножек, укоротив ее бесконечно мало, то деформация ножки уменьшится, ножка удлинится и снова будет касаться плоскости опоры. Таким образом, и в этом случае давление на ножку изменяется бесконечно мало, т. е. непрерывно.

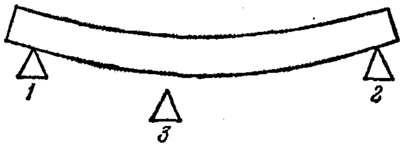

Рис. 110.

Допустим теперь, что реальная балка лежит на двух опорах, *1* и *2* (рис. 110). Под действием силы веса балка прогнется. Будем подводить под балку третью опору *3*, непрерывно поднимая ее. Как только опора *3* коснется балки, с балкой не произойдет еще никаких изменений. Но дальнейшее поднятие опоры *3* будет связано с выпрямлением балки, а для этого опора должна действовать на балку с некоторой силой. По мере поднятия опоры *3* эта сила будет непрерывно возрастать, принимая вполне определенное значение при каждом положении опоры *3*. Приведенное рассуждение ясно показывает, почему при решении задачи о распределении веса балки между тремя опорами надо учитывать ее упругие свойства. Эта задача будет решена в гл. X (см. задачу 3 к § 80). Аналогичное рассуждение можно провести и для стола на четырех ножках.

§ 45. Мгновенная ось вращения

1. Пусть твердое тело вращается вокруг неподвижной оси. Чтобы получить представление о распределении скоростей в нем, достаточно рассмотреть движение точек тела, лежащих в какой-либо одной плоскости, перпендикулярной к оси вращения. Это значит, что тело можно считать как бы плоским. Соответствующее распределение скоростей показано на схематическом рис. 111. Точка O тела, через которую проходит ось вращения, неподвижна. Все другие точки тела движутся по окружностям с центром в O. Их скорости пропорциональны радиусам соответствующих окружностей. Величины скоростей могут меняться с течением времени, но ось вращения остается одной и той же.

2. Рассмотрим теперь более общее движение плоского твердого тела. Плоскость вращения совпадает с плоскостью самого тела. Никакой неподвижной оси, вокруг которой происходило бы вращение тела, не предполагается. Если A и B — две произвольные точки твердого тела (рис. 112), то расстояние между ними остается неизменным, а потому $(\boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_A)^2 = \mathrm{const}$. Дифференцируя это соотношение по времени, получим $(\boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_A)(\dot{\boldsymbol{r}}_B - \dot{\boldsymbol{r}}_A) = 0$, или

$$\boldsymbol{r}_{AB}(\boldsymbol{v}_B - \boldsymbol{v}_A) = 0, \tag{45.1}$$

где $\boldsymbol{r}_{AB} \equiv \overrightarrow{AB}$. Допустим, что в рассматриваемый момент времени в теле существует точка, скорость которой в этот момент времени равна нулю. (В § 47 будет показано, что такая точка существует для

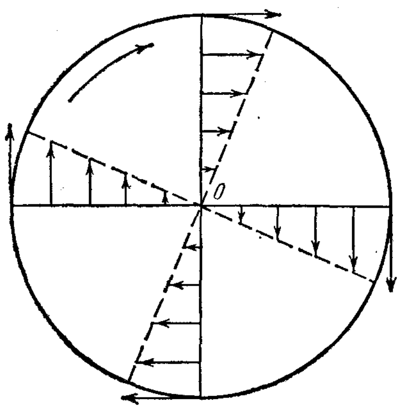

Рис. 111.

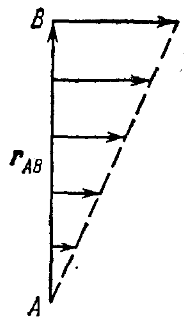

Рис. 112.

произвольного плоского движения твердого тела.) Примем ее за точку A. Тогда для рассматриваемого момента времени

$$\boldsymbol{r}_{AB}\boldsymbol{v}_B = 0,$$

каково бы ни было положение точки B. Отсюда видно, что скорость $\boldsymbol{v}_B$ перпендикулярна к $\boldsymbol{r}_{AB}$, т. е. направлена по касательной к окружности с центром в A. При движении твердого тела всякая прямая в теле остается прямой. Это справедливо и для прямой, соединяющей точки A и B. Поскольку в рассматриваемый момент точка A неподвижна, то величина скорости v_B в этот момент пропорциональна расстоянию AB от точки B до точки A. На основании всего этого можно сказать, что *мгновенное распределение скоростей в теле в рассматриваемый момент времени будет в точности таким же, как и при вращении вокруг неподвижной оси, проходящей через точку* A. Движение тела в этом случае называют *мгновенным вращением*. Прямая, проходящая через точки тела, скорости которых в рассматриваемый момент времени равны нулю, называется *мгновенной осью вращения*. В нашем примере мгновенная ось проходит через точку A. Словом «мгновенная» хотят подчеркнуть, что это понятие служит для описания распределения скоростей только в какой-то заданный *момент времени*. В отличие от неподвижной оси, сохраняющей свое положение в теле и в пространстве, *мгновенная ось, вообще говоря, перемещается как в теле, так и в пространстве*. Если получить моментальную фотографию распределения скоростей в теле, то по виду этой фотографии нельзя сказать, происходит ли вращение вокруг неподвижной или вокруг мгновенной оси. Чтобы отличить эти два вращения, надо получить такие фотографии по крайней мере в два различных момента времени.

3. *Мгновенная ось служит для описания мгновенного распределения только скоростей*. Той же осью нельзя пользоваться для описания мгновенного распределения ускорений или высших производных скорости по времени. Распределение ускорений при вращении вокруг мгновенной оси может существенно отличаться от соответствующего распределения ускорений при вращении вокруг неподвижной оси, хотя бы угловые скорости вращения в обоих случаях и совпадали. Дело в том, что для определения ускорений недостаточно знать распределение скоростей только в рассматриваемый момент времени. Надо знать это распределение также в бесконечно близкий момент времени. А в этот момент может оказаться, что движение тела уже перестанет быть вращением вокруг прежней мгновенной оси.

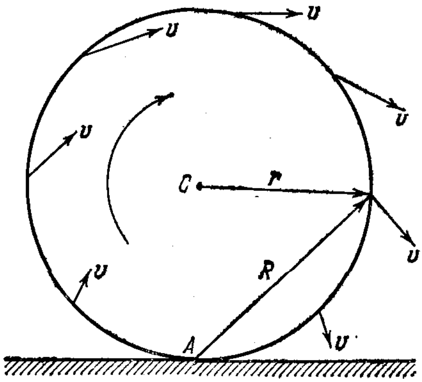

Рис. 113.

Следующий простой пример хорошо разъясняет суть дела. Рассмотрим качение обруча или диска по плоскости без скольжения (рис. 113). Отсутствие скольжения означает, что точка обруча A, которой он касается плоскости, в рассматриваемый момент неподвижна. Следовательно, движение обруча можно рассматривать как мгновенное вращение его вокруг мгновенной оси, проходящей через точку касания A. Распределение скоростей при таком движении показано на рис. 113. С течением времени в соприкосновение с плоскостью будут приходить другие точки обруча. При этом точка касания будет перемещаться по плоскости в ту же сторону, куда движется обруч. Это означает, что мгновенная ось перемещается как относительно катящегося обруча, так и относительно плоскости, по которой происходит качение. В этом и состоит смысл утверждения, что мгновенная ось перемещается как в теле, так и в пространстве. Допустим теперь, что качение происходит с постоянной скоростью. Было бы грубой ошибкой вычислять ускорение по формуле $\boldsymbol{a} = -\omega^2\boldsymbol{R}$, понимая под $\boldsymbol{R}$ радиус-вектор, проведенный от мгновенной оси к рассматриваемой точке обруча. Действительно, полная скорость $\boldsymbol{v}$ любой точки обруча векторно складывается из скорости $\boldsymbol{v}_C$ поступательного движения центра обруча C и скорости $\boldsymbol{v}_{\text{вр}}$ вращения ее относительно того же центра: $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{v}_{\text{вр}}$. Если обруч катится равномерно, то $\frac{d\boldsymbol{v}_C}{dt} = 0$, и ускорение будет равно $\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}_{\text{вр}}}{dt}$. Поступательное движение не влияет на ускорение $\boldsymbol{a}$. Оно такое же, как и при вращении вокруг неподвижного центра, т. е. $\boldsymbol{a} = -\omega^2\boldsymbol{r}$, где радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ проведен из центра обруча O. Таким образом, при равномерном качении ускорение $\boldsymbol{a}$ направлено к центру обруча, а не к мгновенной оси.

§ 46. Угловая скорость как вектор. Сложение вращений

1. Пусть твердое тело вращается вокруг неподвижной или мгновенной оси OA с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ (рис. 114). Возьмем какую-либо произвольную точку этого тела M, отстоящую от оси вращения на расстоянии $r_\perp$. Линейная и угловая скорости точки M связаны соотношением

$$v = \omega r_\perp. \tag{46.1}$$

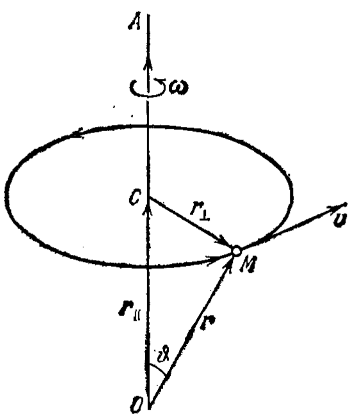

Рис. 114.

Введем аксиальный вектор $\boldsymbol{\omega}$, определяемый векторным произведением

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{[\boldsymbol{r}_\perp \boldsymbol{v}]}{r_\perp^2}, \tag{46.2}$$

где $\boldsymbol{r}_\perp$ — радиус-вектор, проведенный от оси вращения к точке M перпендикулярно к этой оси. Длина вектора $\boldsymbol{\omega}$, в силу соотношения (46.1), численно равна угловой скорости вращения, а направление совпадает с направлением оси вращения. Взаимное расположение векторов $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{r}_\perp$ и $\boldsymbol{v}$ мы уясним лучше, если отложим их из общего начала (рис. 115). Эти три вектора взаимно перпендикулярны. Из рисунка видно, что

$$\boldsymbol{v} = [\boldsymbol{\omega} \boldsymbol{r}_\perp]. \tag{46.3}$$

Эта формула является обобщением формулы (46.1), поскольку она определяет не только величину скорости $\boldsymbol{v}$, но и ее направление. Вектор $\boldsymbol{\omega}$ называется *вектором угловой скорости*, или просто *угловой скоростью вращения*. Таким образом, *угловую скорость можно рассматривать как вектор*. Если расположить буравчик с правой нарезкой параллельно оси вращения и вращать его в ту же сторону,