от мгновенной оси к рассматриваемой точке обруча. Действительно, полная скорость $\boldsymbol{v}$ любой точки обруча векторно складывается из скорости $\boldsymbol{v}_C$ поступательного движения центра обруча C и скорости $\boldsymbol{v}_{\text{вр}}$ вращения ее относительно того же центра: $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{v}_{\text{вр}}$. Если обруч катится равномерно, то $\frac{d\boldsymbol{v}_C}{dt} = 0$, и ускорение будет равно $\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}_{\text{вр}}}{dt}$. Поступательное движение не влияет на ускорение $\boldsymbol{a}$. Оно такое же, как и при вращении вокруг неподвижного центра, т. е. $\boldsymbol{a} = -\omega^2\boldsymbol{r}$, где радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ проведен из центра обруча O. Таким образом, при равномерном качении ускорение $\boldsymbol{a}$ направлено к центру обруча, а не к мгновенной оси.

§ 46. Угловая скорость как вектор. Сложение вращений

1. Пусть твердое тело вращается вокруг неподвижной или мгновенной оси OA с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ (рис. 114). Возьмем какую-либо произвольную точку этого тела M, отстоящую от оси вращения на расстоянии $r_\perp$. Линейная и угловая скорости точки M связаны соотношением

$$v = \omega r_\perp. \tag{46.1}$$

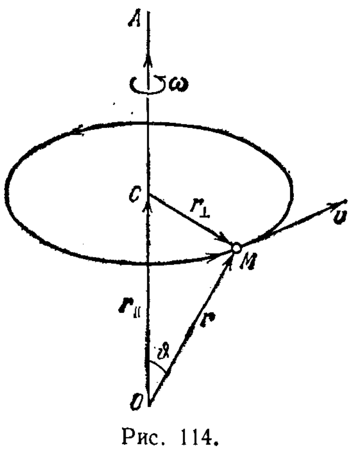

Рис. 114.

Введем аксиальный вектор $\boldsymbol{\omega}$, определяемый векторным произведением

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{[\boldsymbol{r}_\perp \boldsymbol{v}]}{r_\perp^2}, \tag{46.2}$$

где $\boldsymbol{r}_\perp$ — радиус-вектор, проведенный от оси вращения к точке M перпендикулярно к этой оси. Длина вектора $\boldsymbol{\omega}$, в силу соотношения (46.1), численно равна угловой скорости вращения, а направление совпадает с направлением оси вращения. Взаимное расположение векторов $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{r}_\perp$ и $\boldsymbol{v}$ мы уясним лучше, если отложим их из общего начала (рис. 115). Эти три вектора взаимно перпендикулярны. Из рисунка видно, что

$$\boldsymbol{v} = [\boldsymbol{\omega} \boldsymbol{r}_\perp]. \tag{46.3}$$

Эта формула является обобщением формулы (46.1), поскольку она определяет не только величину скорости $\boldsymbol{v}$, но и ее направление. Вектор $\boldsymbol{\omega}$ называется *вектором угловой скорости*, или просто *угловой скоростью вращения*. Таким образом, *угловую скорость можно рассматривать как вектор*. Если расположить буравчик с правой нарезкой параллельно оси вращения и вращать его в ту же сторону, в какую вращается само тело, то направление ввинчивания буравчика укажет направление вектора $\boldsymbol{\omega}$.

Формуле (46.3) можно придать более общий и удобный вид. Возьмем на оси вращения произвольную точку O в качестве начала координат (см. рис. 114). Тогда радиус-вектор $\boldsymbol{r}$, проведенный из этого начала к точке M, можно представить в виде векторной суммы $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_{\perp} + \boldsymbol{r}_{\parallel}$, где $\boldsymbol{r}_{\parallel}$ — слагающая вектора $\boldsymbol{r}$ вдоль оси вращения. Так как $[\boldsymbol{\omega r}_{\parallel}] = 0$, то вместо формулы (46.3) можно написать более общую формулу

$$\boldsymbol{v} = [\boldsymbol{\omega r}]. \tag{46.4}$$

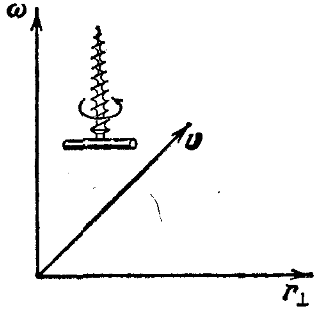

Рис. 115.

Из нее получаем $v = \omega r \sin \vartheta$, что совпадает с формулой (46.1), так как $r \sin \vartheta = r_{\perp}$.

2. *Что величина $\boldsymbol{\omega}$ есть вектор — это не требует специального доказательства, поскольку она определена как векторное произведение двух векторов. Векторный характер $\boldsymbol{\omega}$ означает,* разумеется, *только то, что при повороте координатных систем проекции $\boldsymbol{\omega}$ на их оси преобразуются так же, как разности координат концов направленного геометрического отрезка.* Над векторами угловых скоростей можно выполнять все математические операции, как над всякими векторами. В частности, можно ввести математическое сложение векторов $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$ по правилу параллелограмма. Но как будут складываться угловые скорости, если сложение определить с помощью той или иной *физической* операции, — это требует особого исследования. Введем понятие *сложения вращений,* вложив в него следующий смысл. Пусть тело вращается вокруг некоторой оси OA с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_1$ (рис. 116). Пусть сама ось OA в свою очередь вращается с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_2$ вокруг другой оси OB. Подчеркнем, что в общем случае *речь идет о мгновенных вращениях и притом с нерелятивистскими скоростями.* Первое вращение рассматривается в системе отсчета, в которой (в рассматриваемый момент) ось OA неподвижна. Второе вращение рассматривается в другой системе отсчета — в той, в которой (в тот же момент) неподвижна ось OB. Сложить вращательные движения — значит ответить на вопрос, к какому движению приводит наложение этих двух вращений? При рассмотрении этого вопроса ограничимся случаем, когда оси OA и OB пересекаются между собой.

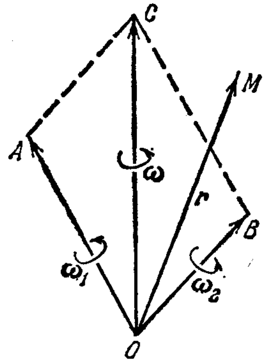

Рис. 116.

Вопрос сводится к сложению линейных скоростей в аналогичном физическом смысле (см. § 7; в нерелятивистской механике, как известно, сложение линейных скоростей производится по правилу параллелограмма). Произвольная точка твердого тела M с радиусом-вектором $\boldsymbol{r}$ в результате первого вращения (вокруг оси OA) получает линейную скорость $\boldsymbol{v}_1 = [\boldsymbol{\omega}_1\boldsymbol{r}]$, а в результате второго вращения (вокруг оси OB) — линейную скорость $\boldsymbol{v}_2 = [\boldsymbol{\omega}_2\boldsymbol{r}]$. Результирующая линейная скорость будет равна

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = [(\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2)\,\boldsymbol{r}].$$

Если ввести векторную сумму в математическом смысле

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2, \tag{46.5}$$

то результат запишется в виде

$$\boldsymbol{v} = [\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{r}]. \tag{46.6}$$

Пусть точка M лежит на оси вектора $\boldsymbol{\omega}$, т. е. на диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$, или ее продолжении. Тогда $\boldsymbol{v} = 0$. Все точки указанной оси в рассматриваемый момент времени находятся в покое. Это объясняется тем, что все эти точки в результате первого вращения движутся в одну, а в результате второго вращения — в противоположную сторону. Результирующая линейная скорость получается равной нулю. Все прочие точки тела вращаются вокруг оси вектора $\boldsymbol{\omega}$ с угловой скоростью ω. Мгновенную линейную скорость любой точки тела можно вычислить по формуле (46.6). Это значит, что *мгновенное результирующее движение твердого тела есть вращение вокруг мгновенной оси OC*. Эта ось, вообще говоря, непрерывно перемещается как относительно самого твердого тела, так и относительно неподвижной системы отсчета, в которой рассматривается движение.

Итак, мы доказали, что *два вращения с угловыми скоростями* $\boldsymbol{\omega}_1$ *и* $\boldsymbol{\omega}_2$ *складываются* (в рассматриваемом физическом смысле) *в одно вращение вокруг мгновенной оси с угловой скоростью* $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2$. *Мгновенная ось в каждый момент времени направлена вдоль диагонали параллелограмма, построенного на векторах* $\boldsymbol{\omega}_1$ *и* $\boldsymbol{\omega}_2$. *Сложение подчиняется правилу параллелограмма.* Физическое сложение в указанном смысле оказалось тождественным с математическим.

3. Поясним изложенное наглядным примером. Пусть по поверхности неподвижного кругового конуса *2* катится без скольжения другой круговой конус *1* (рис. 117 и 118). Вершины обоих конусов все время находятся в одной и той же точке O. В рассматриваемом движении конус *1* вращается вокруг собственной оси OA с некоторой угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_1$. Сама ось OA описывает коническую поверхность, вращаясь вокруг другой оси OB с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_2$. Речь идет о сложении этих двух вращений. Так как скольжения нет, то все точки тела, лежащие на прямой OC, по которой конусы касаются друг друга, неподвижны. Касательная OC является поэтому мгновенной осью вращения конуса *1*. Мгно-

венная ось вращения перемещается в теле, т. е. в конусе *1*, двигаясь по его поверхности. Но она перемещается также и в пространстве, т. е. по поверхности конуса *2*.

4. Вращение вокруг параллельных осей можно рассматривать как предельный случай вращений вокруг пересекающихся осей. При сложении таких вращений надо различать два случая: 1) вращения совершаются в одном на-

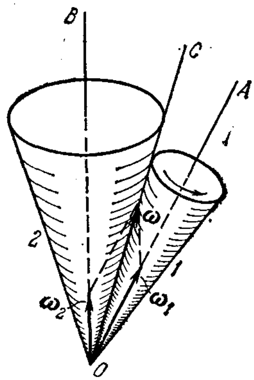

Рис. 117.

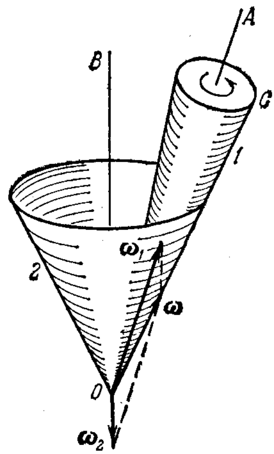

Рис. 118.

правлении, 2) вращения совершаются в противоположных направлениях. Рассмотрим первый случай. Построив параллелограмм на

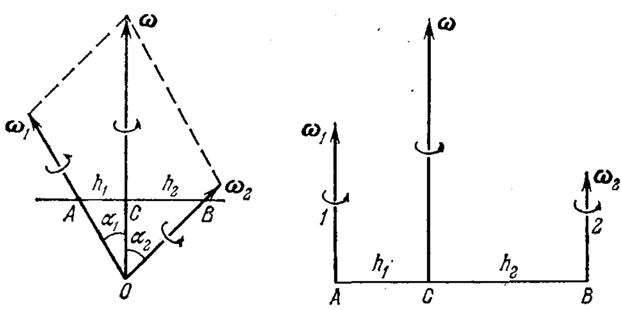

Рис. 119.

векторах $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$, пересечем его произвольной прямой ACB, перпендикулярной к вектору $\boldsymbol{\omega}$ (рис. 119 слева). Тогда $h_1 = OC \cdot \operatorname{tg} \alpha_1$, $h_2 = OC \cdot \operatorname{tg} \alpha_2$. Если углы α_1 и α_2 малы, то их тангенсы можно заменить синусами. Сделав это, получим

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}. \tag{46.7}$$

Устремив точку O в бесконечность, получим предельный случай одинаково направленных вращений вокруг параллельных осей (рис. 119 справа). Такие два вращения складываются в одно вращение вокруг мгновенной оси с угловой скоростью $\omega = \omega_1 + \omega_2$. Мгновенная ось проходит между осями *1* и *2* и делит расстояние между ними обратно пропорционально угловым скоростям ω_1 и ω_2.

Аналогично рассматривается случай, когда векторы $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$ направлены противоположно. Если $\omega_1 > \omega_2$, то $\omega = \omega_1 - \omega_2$. Мгновенная ось проходит вне отрезка AB со стороны большей угловой скорости (рис. 120). Она делит отрезок AB *внешним образом* на части h_1 и h_2, обратно пропорциональные угловым скоростям ω_1 и ω_2.

Рис. 120.

5. Рассмотрим, наконец, сложение поступательного и вращательного движений. Если поступательное движение совершается параллельно оси вращения, то при сложении, очевидно, получится *винтовое движение*. Достаточно поэтому ограничиться случаем, когда поступательное движение перпендикулярно к оси вращения. В этом случае все точки тела будут двигаться параллельно одной и той же плоскости, перпендикулярной к той же оси. Такое движение называется *плоским*. Плоскость, параллельно которой происходит движение, можно принять за плоскость рисунка. Поступательное движение можно рассматривать как вращение вокруг бесконечно удаленной оси. Поэтому разбираемый случай можно свести к сложению двух вращений вокруг параллельных осей, удаляя одну из осей в бесконечность. Ясно, что в результате возникнет вращение вокруг какой-то мгновенной оси. Задача сводится к определению положения мгновенной оси и угловой скорости мгновенного вращения. Пусть тело вращается вокруг оси O с угловой скоростью ω,

а сама ось O вращается вокруг параллельной неподвижной оси O_1 с угловой скоростью ω_1 (рис. 121). При сложении возникнет вращение вокруг мгновенной оси A, причем

$$\frac{h}{h_1} = \frac{\omega_1}{\omega}.$$

Вследствие вращения вокруг оси O_1 ось O получает скорость $v = \omega_1 (h + h_1)$, перпендикулярную к линии O_1O. Будем удалять O_1 в бесконечность, одновременно уменьшая ω_1 так, чтобы величина скорости v оставалась неизменной. В пределе вращение оси O вокруг оси O_1 перейдет в поступательное движение со скоростью v. Положение мгновенной оси вращения A определится ее расстоянием до оси O. Это расстояние равно

$$h = \frac{h_1\omega_1}{\omega} = \frac{(h_1 + h)\,\omega_1 - h\omega_1}{\omega} = \frac{v - h\omega_1}{\omega}.$$

Отсюда

$$h\left(1 + \frac{\omega_1}{\omega}\right) = \frac{v}{\omega}.$$

Так как $\omega_1 \to 0$, то в пределе

$$h = \frac{v}{\omega}. \tag{46.8}$$

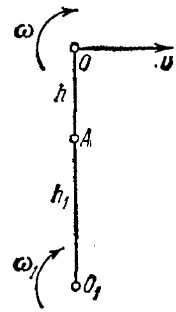

Рис. 121.

При этом угловая скорость мгновенного вращения в пределе сделается равной ω.

6. Если аксиальный вектор $\boldsymbol{\omega}$ продифференцировать по скалярному аргументу, например по времени t, то в результате получится новый аксиальный вектор $\boldsymbol{\eta} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$, называемый *угловым ускорением* (см. § 7). Его проекции на координатные оси по определению даются выражениями $\eta_x = \frac{d\omega_x}{dt}$, $\eta_y = \frac{d\omega_y}{dt}$, $\eta_z = \frac{d\omega_z}{dt}$. Аналогично, в результате интегрирования $\boldsymbol{\omega}$ по t получается другой аксиальный вектор $\boldsymbol{\varphi} = \int \boldsymbol{\omega}\, dt$ с составляющими $\varphi_x = \int \omega_x\, dt$, $\varphi_y = \int \omega_y\, dt$, $\varphi_z = \int \omega_z\, dt$. Векторный (точнее, псевдовекторный) характер этих величин, как всегда, означает только то, что при повороте (но не инверсии) координатных систем их составляющие преобразуются так же, как разности координат концов направленного геометрического отрезка. Если направление оси вращения не меняется с течением времени, то вектор $\boldsymbol{\varphi}$ направлен параллельно $\boldsymbol{\omega}$, т. е. по оси вращения. Его длина численно равна углу поворота тела за рассматриваемый промежуток времени. Поэтому $\boldsymbol{\varphi}$ естественно назвать *угловым поворотом тела*. По величине угловой поворот пропорционален площади сектора OAB, описываемого каким-либо отрезком OA, перпендикулярным к оси вращения, при его переходе из начального положения OA в конечное положение OB (рис. 122). Направление φ совпадает с направлением перпендикуляра к плоскости сектора OAB, а его составляющие φ_x, φ_y, φ_z пропорциональны площадям проекций этого сектора на координатные плоскости. Это лишний раз подтверждает векторный характер величины φ (см. § 7).

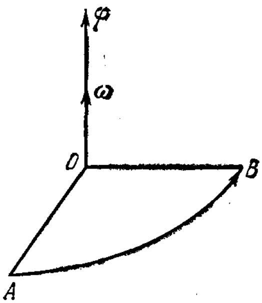

Рис. 122.

7. На примере угловых поворотов можно наглядно показать необходимость строгого разграничения между *математическим сложением* векторов (аксиоматически определяемым с помощью правила параллелограмма) и *физическим сложением* их, вводимым с помощью какой-либо физической операции. Введем физическое сложение угловых перемещений в том же смысле, в каком понимается физическое сложение линейных перемещений (см. § 7, п. 6). Пусть материальная точка последовательно совершает вращения вокруг различных осей, проходящих через неподвижную точку O (рис. 123). При таких вращениях она движется вдоль дуг больших кругов по поверхности сферы с центром в O. Пусть точка перешла из начального положения A в конечное положение B вдоль дуги большого круга AB. Радиус-вектор точки при этом повернулся на угол φ_1. Затем точка совершила поворот на угол φ_2, перейдя по дуге большого круга BC из положения B в положение C. Каким одним поворотом можно заменить эти два поворота, чтобы перевести точку из того же начального положения A в то же конечное положение C? Ясно, что таким поворотом будет вращение точки по дуге большого круга, проходящей через точки A и C. Обозначим соответствующий угол поворота φ_3. В соответствии со сказанным выше рассматриваемые три поворота можно изобразить векторами φ_1, φ_2, φ_3, перпендикулярными соответственно к плоскостям секторов OAB, OBC и OAC. Поворот φ_3 можно назвать суммой поворотов φ_1 и φ_2 в рассматриваемом физическом смысле. Ясно, что такое сложение не подчиняется правилу параллелограмма. Это видно уже из того, что в общем случае вектор φ_3 не лежит в плоскости векторов φ_1 и φ_2.

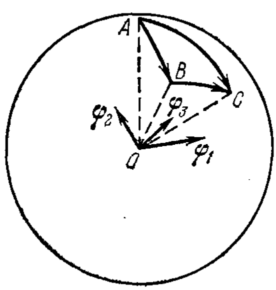

Рис. 123.

Особенно очевидным станет это утверждение, если рассмотреть частный случай. За начальное положение материальной точки возьмем полюс A (рис. 124). Затем по дуге меридиана AB совершим первый поворот на угол $\varphi_1 = 90°$, переведя точку в положение B на экваторе. Второй поворот на угол $\varphi_2 = 90°$ совершим по дуге экватора BC. Очевидно, третий поворот φ_3 надо произвести по дуге меридиана AC также на 90°. В рассматриваемом случае все три вектора, $\boldsymbol{\varphi}_1$, $\boldsymbol{\varphi}_2$, $\boldsymbol{\varphi}_3$, взаимно перпендикулярны и имеют одну и ту же длину. Ни один из них не может быть геометрической суммой двух других.

Если φ_x, φ_y, φ_z означают проекции вектора $\boldsymbol{\varphi}$ на координатные оси, то $\boldsymbol{\varphi} = \varphi_x \boldsymbol{i} + \varphi_y \boldsymbol{j} + \varphi_z \boldsymbol{k}$. Здесь сложение понимается в математическом смысле (по правилу параллелограмма). Однако, как следует из изложенного, слагаемые $\varphi_x \boldsymbol{i}$, $\varphi_y \boldsymbol{j}$, $\varphi_z \boldsymbol{k}$ нельзя рассматривать как последовательно выполняемые повороты вокруг координатных осей, приводящие к единому повороту, представляемому вектором $\boldsymbol{\varphi}$.

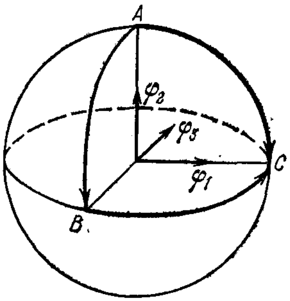

Рис. 124.

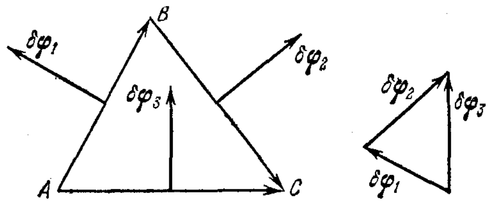

Рис. 125.

8. Допустим, однако, что углы φ_1, φ_2, φ_3 неограниченно стремятся к нулю. Тогда сферический треугольник ABC (см. рис. 123) становится бесконечно малым и может считаться плоским (рис. 125). Дуги больших кругов AB, BC и AC могут рассматриваться как прямолинейные отрезки. Векторы угловых перемещений $\delta\boldsymbol{\varphi}_1$, $\delta\boldsymbol{\varphi}_2$, $\delta\boldsymbol{\varphi}_3$ будут лежать в плоскости треугольника ABC. (Мы пишем $\delta\boldsymbol{\varphi}$ вместо $\boldsymbol{\varphi}$, чтобы подчеркнуть, что речь идет о бесконечно малых углах.) Они, очевидно, перпендикулярны к сторонам AB, BC и AC соответственно, а их длины пропорциональны этим сторонам (см. рис. 125). Отсюда следует, что бесконечно малый вектор $\delta\boldsymbol{\varphi}_3$ является геометрической суммой векторов $\delta\boldsymbol{\varphi}_1$ и $\delta\boldsymbol{\varphi}_2$. Это значит, что *бесконечно малые угловые перемещения складываются геометрически* (в указанном выше физическом смысле), *т. е. по правилу параллелограмма.* Иными словами, такое *физическое сложение угловых перемещений в пределе бесконечно малых углов поворота переходит в математическое.*

ЗАДАЧИ

1. Показать, что элементарная работа, совершаемая над системой материальных точек при ее повороте на бесконечно малый угол $\delta\boldsymbol{\varphi}$, выражается скалярным произведением

$$\delta A = (\boldsymbol{M}\delta\boldsymbol{\varphi}), \tag{46.9}$$

где $\boldsymbol{M}$ — геометрическая сумма моментов сил, действующих на материальные точки системы, относительно вершины угла поворота.

Решение. $\delta A = \Sigma\,(\boldsymbol{F}_i\,\delta\boldsymbol{r}_i)$. Здесь суммирование ведется по всем точкам системы. При повороте $\delta\boldsymbol{r}_i = [\delta\boldsymbol{\varphi}\,\boldsymbol{r}_i]$, причем угол $\delta\boldsymbol{\varphi}$ — один и тот же для всей системы. Подставив это выражение в предыдущую формулу и замечая, что $\boldsymbol{F}_i\,[\delta\boldsymbol{\varphi}\,\boldsymbol{r}_i] = \delta\boldsymbol{\varphi}\,[\boldsymbol{r}_i\boldsymbol{F}_i] = (\boldsymbol{M}_i\delta\boldsymbol{\varphi})$, получим требуемый результат.

2. Используя изотропию пространства, доказать, что геометрическая сумма моментов внутренних сил, действующих в системе материальных точек, равна нулю (см. § 38).

Решение. Допустим, что система замкнута. Пусть $\boldsymbol{M}_1, \boldsymbol{M}_2, \ldots$ — моменты внутренних сил, действующие на материальные точки системы, относительно произвольного неподвижного начала O. Повернем всю систему вокруг точки O на произвольный бесконечно малый угол $\delta\boldsymbol{\varphi}$ и притом так, чтобы скорости всех материальных точек повернулись на тот же угол без изменения своей величины. Ввиду изотропии пространства на такой поворот не требуется затраты работы. Но эта работа представляется скалярным произведением $(\boldsymbol{M}_1 + \boldsymbol{M}_2 + \ldots)\,\delta\boldsymbol{\varphi}$. Значит, это скалярное произведение равно нулю, каков бы ни был поворот $\delta\boldsymbol{\varphi}$. Отсюда следует, что для замкнутой системы $\boldsymbol{M}_1 + \boldsymbol{M}_2 + \ldots = 0$.

3. Пусть вектор $\boldsymbol{A}$ неизменной длины вращается вокруг своего начала с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$. Показать, что его производная по времени определяется формулой

$$\dot{\boldsymbol{A}} = [\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{A}]. \tag{46.10}$$

В частности, при вращении координатной системы орты $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ дифференцируются по формулам:

$$\frac{d\boldsymbol{i}}{dt} = [\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{i}], \quad \frac{d\boldsymbol{j}}{dt} = [\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{j}], \quad \frac{d\boldsymbol{k}}{dt} = [\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{k}]. \tag{46.11}$$

Решение. Вектор $\boldsymbol{A}$ неизменной длины можно отождествить с абсолютно твердым тонким стержнем той же длины. Если начало вектора $\boldsymbol{A}$ неподвижно, то производная $\dot{\boldsymbol{A}}$ имеет смысл скорости движущегося конца стержня. При такой интерпретации формула (46.10) становится частным случаем формулы (46.4).

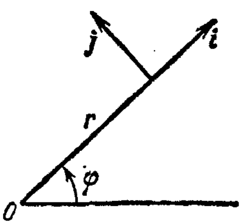

Рис. 126.

4. Движение точки на плоскости можно задать полярными координатами r и φ (рис. 126). Найти выражения для скорости и ускорения точки в этой системе координат.

Решение. Введем единичные векторы $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$. Вектор $\boldsymbol{i}$ направим вдоль радиуса $\boldsymbol{r}$. Вектор $\boldsymbol{j}$ перпендикулярен к нему и направлен в сторону возрастания угла φ. Вектор $\boldsymbol{k}$ (не изображенный на рисунке) перпендикулярен к плоскости рисунка и образует с векторами $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$ правовинтовую систему. При движении точки векторы $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$ вращаются вокруг начала координат с угловой скоростью $\omega = \dot{\varphi}$. Вектор угловой скорости направлен вдоль $\boldsymbol{k}$, так что $\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\boldsymbol{k}$. Применяя формулы (46.11), находим производные векторов $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$:

$$\frac{d\boldsymbol{i}}{dt} = \dot{\varphi}\,[\boldsymbol{k}\boldsymbol{i}] = \dot{\varphi}\boldsymbol{j}, \quad \frac{d\boldsymbol{j}}{dt} = \dot{\varphi}\,[\boldsymbol{k}\boldsymbol{j}] = -\dot{\varphi}\boldsymbol{i}. \tag{46.12}$$

Представим радиус-вектор движущейся точки в виде $\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{i}$. Дифференцируя его один раз, находим скорость:

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = \dot{r}\boldsymbol{i} + r\frac{d\boldsymbol{i}}{dt} = \dot{r}\boldsymbol{i} + r\dot{\varphi}\boldsymbol{j}.$$

Дифференцируя вторично, находим ускорение:

$$\boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{v}} = \ddot{r}\boldsymbol{i} + r\frac{d\boldsymbol{i}}{dt} + \dot{r}\dot{\varphi}\boldsymbol{j} + r\ddot{\varphi}\boldsymbol{j} + r\dot{\varphi}\frac{d\boldsymbol{j}}{dt} = (\ddot{r} - \dot{\varphi}^2 r)\,\boldsymbol{i} + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\,\boldsymbol{j}.$$

Эти формулы дают разложение скорости и ускорения на радиальные (направленные вдоль радиуса) и азимутальные (направленные по $\boldsymbol{j}$, т. е. в сторону возрастания угла φ) составляющие:

$$v_r = \dot{r}, \qquad v_\varphi = r\dot{\varphi}; \tag{46.13}$$

$$a_r = \ddot{r} - \dot{\varphi}^2 r, \qquad a_\varphi = 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}. \tag{46.14}$$

5. С помощью соотношения (46.10) получить формулы для дифференцирования синуса и косинуса.

Решение. Рассмотрим единичный вектор $\boldsymbol{A}$, равномерно вращающийся вокруг начала координат O (рис. 127). Если координатные оси неподвижны, то

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i} \cos \omega t + \boldsymbol{j} \sin \omega t.$$

Производная этого вектора по t равна

$$\dot{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{i} \frac{d}{dt} (\cos \omega t) + \boldsymbol{j} \frac{d}{dt} (\sin \omega t).$$

С другой стороны, ту же производную можно вычислить по формуле (46.10). Так как $\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{k}$, то эта формула дает

$$\dot{\boldsymbol{A}} = \omega\, [\boldsymbol{k}\boldsymbol{A}] = \omega \cos \omega t\, [\boldsymbol{k}\boldsymbol{i}] + \omega \sin \omega t\, [\boldsymbol{k}\boldsymbol{j}] = \boldsymbol{j}\omega \cos \omega t - \boldsymbol{i}\omega \sin \omega t.$$

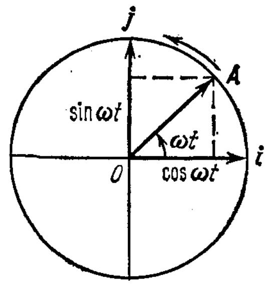

Рис. 127.

Сравнивая оба результата, получим

$$\frac{d}{dt} (\sin \omega t) = \omega \cos \omega t, \qquad \frac{d}{dt} (\cos \omega t) = -\omega \sin \omega t.$$

Можно сказать, что векторная формула (46.10) эквивалентна правилам дифференцирования синуса и косинуса.

§ 47. Теорема Эйлера. Общее движение твердого тела

1. Рассмотрим *плоское движение* твердого тела, т. е. такое движение, когда все точки тела движутся параллельно одной плоскости. Не теряя общности, можно считать само тело плоским, а движение происходящим в плоскости тела. Положение плоского тела однозначно определяется заданием положений каких-либо двух точек его. Поэтому достаточно ограничиться рассмотрением движения какой-либо одной прямой плоского тела. Пусть выбранная прямая твердого тела перешла из положения AB в положение A_1B_1 (рис. 128). Соединим точку A с точкой A_1, а точку B с точкой B_1. Из середин отрезков AA_1 и BB_1 восстановим перпендикуляры EO и DO, пересекающиеся в точке O. Докажем, что прямую AB можно перевести в положение A_1B_1 путем одного поворота вокруг точки O. Действительно, из построения следует, что точка O равноудалена от точек A и A_1, а также от точек B и B_1. В силу этого пря-

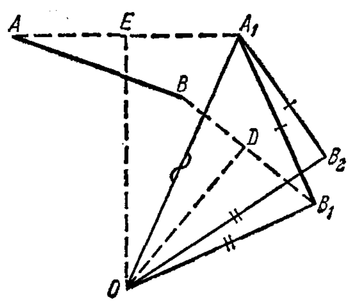

Рис. 128.