§ 49. Гироскопы. Движение свободного гироскопа

1. В буквальном переводе слово «гироскоп» означает прибор для обнаружения вращения. В широком смысле *гироскопом* называется быстро вращающееся твердое тело, ось вращения которого может изменять свое направление в пространстве. Гироскоп, в особенности когда на него действуют внешние силы, может совершать удивительные движения, кажущиеся на первый взгляд неожиданными и непонятными. Они всегда воспринимаются с захватывающим интересом. Быстро вращающийся волчок может служить не только забавной игрушкой, но и прекрасным демонстрационным прибором при изучении законов механики. Все явления, обусловленные быстрым вращением гироскопа, называются *гироскопическими*. Они нашли широкие научно-технические применения (см. § 51).

Гироскопические эффекты проявляются также у атомов благодаря наличию у них моментов количества движения, связанных с внутренними орбитальными движениями или собственными вращениями (спинами) электронов и атомных ядер. Конечно, эти, как и всякие другие атомные явления, должны рассматриваться на основе квантовой механики. Однако есть много общего в гироскопических свойствах атомных и макроскопических систем. Поэтому теория гироскопов может оказаться полезной и при изучении атомной физики.

Наибольшее значение в науке и технике имеют *симметричные гироскопы. Симметричным* называется гироскоп, обладающий симметрией вращения относительно некоторой оси, называемой *геометрической осью* или *осью фигуры гироскопа*. Теория симметричного гироскопа более проста и более важна, чем теория несимметричного гироскопа. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением только симметричных гироскопов. Обычно одна из точек оси фигуры гироскопа бывает закреплена. Закрепленную точку оси фигуры называют *точкой опоры гироскопа*. В более общем смысле *точкой опоры гироскопа* называют такую точку O оси фигуры его, относительно которой рассматривают вращение гироскопа. В общем случае движение гироскопа слагается из движения точки опоры O и вращения вокруг мгновенной оси, проходящей через эту точку. Примером гироскопа с движущейся точкой опоры может служить детская игрушка — *волчок*. Основным в теории является случай, когда точка опоры *неподвижна*. К этому частному случаю можно свести и общий случай, когда точка опоры движется (см. п. 6).

2. Чтобы ось фигуры гироскопа могла свободно поворачиваться в пространстве, гироскоп обычно помещают в так называемом *кардановом подвесе* (рис. 144). Маховичок гироскопа закрепляется на его оси фигуры $A'A$, которая может вращаться по возможности с малым трением в подшипниках, укрепленных на концах диаметра *внутреннего кольца.* Внутреннее кольцо в свою очередь может вращаться вокруг перпендикулярной оси $B'B$, проходящей через подшипники на концах диаметра *наружного кольца.* Наконец, наружное кольцо может совершать вращение вокруг третьей оси $D'D$, проходящей через неподвижные подшипники подставки. Ось $B'B$ перпендикулярна к оси $A'A$. Все три оси пересекаются в одной точке, называемой *центром карданова подвеса.* Гироскоп в кардановом подвесе имеет *три* степени свободы и может совершать любые повороты вокруг центра подвеса. Во всех вопросах мы будем пренебрегать кинетической энергией и моментами импульсов колец, считая их пренебрежимо малыми по сравнению с кинетической энергией и моментом импульса маховичка гироскопа. Если центр карданова подвеса или точка опоры совпадает с центром масс гироскопа, то гироскоп называется *уравновешенным.*

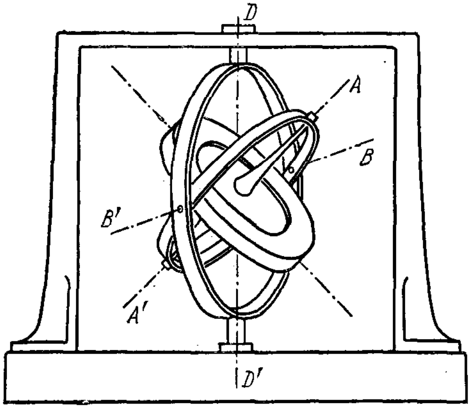

Рис. 144.

3. Согласно теореме Эйлера (§ 47) движение гироскопа с неподвижной точкой опоры O можно представить как вращение вокруг мгновенной оси, проходящей через эту точку. Обозначим $\boldsymbol{\omega}$ вектор мгновенной угловой скорости, с которой вращается гироскоп, $\boldsymbol{L}$ — момент импульса гироскопа относительно точки O. Найдем связь между векторами $\boldsymbol{L}$ и $\boldsymbol{\omega}$ для симметричного гироскопа. Если угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ направлена вдоль оси фигуры гироскопа или перпендикулярно к ней, то векторы $\boldsymbol{L}$ и $\boldsymbol{\omega}$ параллельны между собой. Убедиться в этом проще всего можно следующим образом. Мысленно разобьем все тело гироскопа на пары одинаковых материальных точек, симметрично расположенных относительно оси фигуры гироскопа, как указано на рис. 145 и 146. Момент импульса такой пары точек относительно точки O будет $d\boldsymbol{L} = dm\,[\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{v}_1] + dm[\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{v}_2]$, где dm — масса каждой из них. Если гироскоп вращается вокруг оси своей фигуры (рис. 145), то скорости $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ равны по величине, но направлены противоположно. В этом случае $d\boldsymbol{L} = dm\,[\boldsymbol{v}_2\,(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)]$. Векторы $\boldsymbol{v}_2$ и $(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)$ перпендикулярны к оси вращения. Поэтому вектор $d\boldsymbol{L}$, а с ним и момент импульса всего гироскопа $\boldsymbol{L}$ будут направлены вдоль оси вращения. По величине $\boldsymbol{L}$ совпадает с моментом импульса относительно оси вращения, а потому $\boldsymbol{L} = I_{\parallel}\boldsymbol{\omega}$, где $I_{\parallel}$ — момент инерции гироскопа

относительно оси его фигуры. Если теперь гироскоп вращается вокруг оси, перпендикулярной к оси фигуры (рис. 146), то $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2$, а потому $d\boldsymbol{L} = dm\,[\boldsymbol{v}_1\,(\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2)]$. Отсюда видно, что $d\boldsymbol{L}$ и $\boldsymbol{L}$ опять направлены вдоль оси вращения, причем $\boldsymbol{L} = I_{\perp}\boldsymbol{\omega}$, где $I_{\perp}$ — мо-

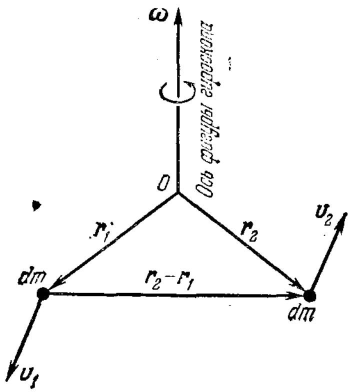

Рис. 145.

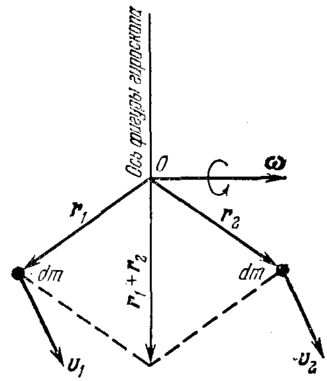

Рис. 146.

мент инерции гироскопа относительно оси, перпендикулярной к его оси фигуры.

Допустим теперь, что мгновенная ось направлена под произвольным углом к оси фигуры гироскопа. Разложим вектор $\boldsymbol{\omega}$ на две составляющие: направленную вдоль оси фигуры гироскопа $\boldsymbol{\omega}_{\parallel}$ и перпендикулярную к ней $\boldsymbol{\omega}_{\perp}$ (рис. 147). Из общего определения момента импульса (см. § 30) следует, что он выражается линейно через линейные скорости материальных точек, на которые мысленно можно разбить тело гироскопа. В свою очередь эти скорости выражаются линейно через вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$, имеющий одно и то же значение для всех точек гироскопа. Отсюда следует, что *вектор* $\boldsymbol{L}$ *линейно выражается через* $\boldsymbol{\omega}$. Рассматривая его как функцию $\boldsymbol{\omega}$, можно написать $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}(\boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{L}(\boldsymbol{\omega}_{\parallel} + \boldsymbol{\omega}_{\perp})$, или, в силу указанной линейности, $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}(\boldsymbol{\omega}_{\parallel}) + \boldsymbol{L}(\boldsymbol{\omega}_{\perp})$.

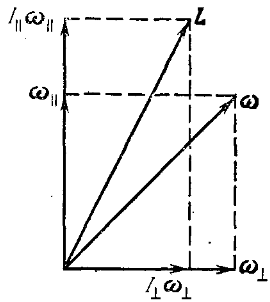

Рис. 147.

Но функция $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{\omega}_{\parallel})$ была бы равна моменту импульса гироскопа, если бы последний вращался только вокруг его оси фигуры с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_{\parallel}$. Значит, $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{\omega}_{\parallel}) = I_{\parallel}\boldsymbol{\omega}_{\parallel}$. Аналогично $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{\omega}_{\perp}) = I_{\perp}\boldsymbol{\omega}_{\perp}$. В результате получим

$$\boldsymbol{L} = I_{\parallel}\boldsymbol{\omega}_{\parallel} + I_{\perp}\boldsymbol{\omega}_{\perp}. \tag{49.1}$$

Пользуясь этой формулой, легко найти построением вектор $\boldsymbol{L}$, если известен вектор $\boldsymbol{\omega}$ (рис. 147). Из построения видно, что векторы $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{\omega}$ и ось фигуры гироскопа лежат в одной плоскости. Однако в общем случае направления векторов $\boldsymbol{L}$ и $\boldsymbol{\omega}$ не совпадают.

Если воспользоваться формулой (47.2), то из (49.1) можно получить следующие два выражения для кинетической энергии вращающегося гироскопа:

$$K=\frac{1}{2}(I_{\parallel}\omega_{\parallel}^2+I_{\perp}\omega_{\perp}^2)=\frac{1}{2}\left(\frac{L_{\parallel}^2}{I_{\parallel}}+\frac{L_{\perp}^2}{I_{\perp}}\right). \tag{49.2}$$

Эти выражения показывают, что *кинетическая энергия симметричного гироскопа равна сумме кинетических энергий двух вращений, из которых одно совершается вокруг оси фигуры, а другое — вокруг оси, к ней перпендикулярной*.

На практике гироскоп всегда приводится в быстрое вращение вокруг оси фигуры. По сравнению с этим быстрым вращением вращение, возникающее по тем или иным причинам вокруг перпендикулярной оси, всегда происходит *медленно*. Тогда различие в направлениях векторов $\boldsymbol{L}$ и $\boldsymbol{\omega}$ становится очень малым. Оба эти направления практически совпадают с направлением оси фигуры гироскопа.

За положительное направление оси фигуры гироскопа принимают направление ее, совпадающее с направлением вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ (точнее, образующее с ним острый угол). Если от точки опоры O отложить отрезок OS единичной длины в положительном направлении оси фигуры гироскопа, то конец этого отрезка S называется *вершиной гироскопа*. Если известно движение вершины гироскопа и угловая скорость вращения его вокруг оси фигуры, то движение гироскопа определено полностью. Поэтому основная задача теории гироскопа сводится к нахождению движения вершины гироскопа и угловой скорости вращения его вокруг оси фигуры.

4. Вся теория гироскопа построена на уравнении моментов

$$\dot{\boldsymbol{L}}=\boldsymbol{M}, \tag{49.3}$$

причем моменты $\boldsymbol{L}$ и $\boldsymbol{M}$ берутся относительно неподвижной точки опоры гироскопа O. Если момент внешних сил $\boldsymbol{M}$ равен нулю, то гироскоп называется *свободным*. Для свободного гироскопа $\dot{\boldsymbol{L}}=0$, и следовательно,

$$\boldsymbol{L}\equiv I_{\parallel}\boldsymbol{\omega}_{\parallel}+I_{\perp}\boldsymbol{\omega}_{\perp}=\mathrm{const}. \tag{49.4}$$

Это уравнение выражает сохранение момента импульса гироскопа. К нему следует присоединить уравнение сохранения энергии

$$K\equiv\frac{1}{2}(\boldsymbol{L\omega})=\frac{1}{2}(I_{\parallel}\omega_{\parallel}^2+I_{\perp}\omega_{\perp}^2)=\mathrm{const}, \tag{49.5}$$

которое также является следствием уравнения (49.3). Если уравнение (49.4) возвести в квадрат, то получится

$$I_{\|}^2\omega_{\|}^2+I_{\perp}^2\omega_{\perp}^2=\text{const}.$$

Из этого и предыдущего уравнений следует, что *при движении свободного гироскопа длины векторов* $\boldsymbol{\omega}_{\|}$ *и* $\boldsymbol{\omega}_{\perp}$ *остаются постоянными.* Вместе с ними *остаются постоянными и обе составляющие момента импульса:* $L_{\|}=I_{\|}\omega_{\|}$ *и* $L_{\perp}=I_{\perp}\omega_{\perp}$. Следовательно, *остается постоянным угол между векторами* $\boldsymbol{L}$ *и* $\boldsymbol{\omega}$, как это видно из уравнения (49.5). *Из постоянства* $L_{\|}$ *и* $L_{\perp}$ *следует также постоянство угла между вектором* $\boldsymbol{L}$ *и осью фигуры гироскопа.* В каждый момент времени ось фигуры гироскопа совершает вращение вокруг мгновенной оси с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$. Векторы $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{L}$, как мы видели, лежат в одной плоскости с осью фигуры гироскопа. А так как вектор $\boldsymbol{L}$ сохраняет неизменным свое направление в пространстве, то мгновенная ось и ось фигуры должны вращаться вокруг этого неизменного направления с одной и той же угловой скоростью. Все это приводит к следующей картине движения свободного гироскопа.

В каждый момент времени движение свободного гироскопа есть вращение вокруг мгновенной оси, проходящей через неподвижную точку опоры. С течением времени мгновенная ось и вектор $\boldsymbol{L}$ *меняют свое положение в теле, описывая конусы вокруг оси фигуры гироскопа с одной и той же постоянной угловой скоростью* $\boldsymbol{\omega}_1$, *вообще говоря, не равной* $\boldsymbol{\omega}$. *Направление вектора* $\boldsymbol{L}$ *неизменно в пространстве. Ось фигуры гироскопа и мгновенная ось равномерно вращаются в пространстве вокруг этого направления с той же угловой скоростью* $\boldsymbol{\omega}_1$, *но в противоположном направлении.* Такое движение называется *свободной регулярной прецессией гироскопа.* Слово «регулярная» надо понимать в том смысле, что на конические вращения оси фигуры гироскопа и мгновенной оси не накладываются никакие дрожания.

5. Если гироскоп с достаточно большим моментом инерции привести в быстрое вращение, то он будет обладать большим моментом импульса. Приращение момента импульса, как это следует из уравнения (49.3), определяется интегралом

$$\Delta\boldsymbol{L}=\int\boldsymbol{M}\,dt. \qquad (49.6)$$

Если внешняя сила действует в течение короткого промежутка времени, то интеграл (49.6), а с ним и приращение момента импульса будут малы. Значит, при кратковременных воздействиях даже очень больших сил движение свободного гироскопа изменяется мало.

Гироскоп как бы сопротивляется всяким попыткам изменить величину и направление его момента импульса. С этим связана замечательная устойчивость, которую приобретает движение гироскопа после приведения его в быстрое вращение.

Возьмем массивный гироскоп, имеющий конусообразную форму (рис. 148). Вдоль оси его фигуры может ввинчиваться стержень с острым концом, которым гироскоп опирается на подставку. Ввинтим стержень настолько, чтобы точка опоры совпала с центром масс гироскопа. Тогда гироскоп станет уравновешенным. При любом наклоне его оси фигуры он будет находиться в безразличном равновесии. Пока гироскоп не вращается, малейший толчок далеко уводит его из положения равновесия. Приведем теперь гироскоп в быстрое вращение вокруг его оси фигуры. Если палкой нанести сильный удар по стержню гироскопа, то направление стержня в пространстве почти не изменится. Стержень начнет лишь совершать свободную регулярную прецессию, т. е. вращательное движение по поверхности конуса малого угла раствора. Осью конуса будет служить направление момента импульса гироскопа, которое он примет после нанесения удара.

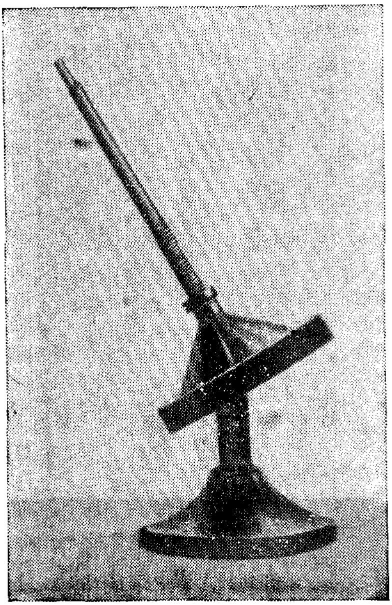

Рис. 148.

Вот другая демонстрация устойчивости движения быстро вращающегося гироскопа. Гироскоп состоит из массивного металлического маховичка, помещаемого внутри разборного полого металлического шара, состоящего из двух полушарий, которые могут сцепляться между собой. Концы оси маховичка входят в подшипники полого шара, так что маховичок может вращаться вокруг одного из диаметров шара. На ось маховичка наматывается нить, свободный конец которой выходит наружу через отверстие в полом шаре. Дергая за нить, можно привести маховичок в быстрое вращение. Если такой шар попытаться скатить с наклонной плоскости, то он будет упорно сопротивляться этим попыткам. «Послушным» шар будет только тогда, когда ось маховичка горизонтальна и перпендикулярна к направлению скатывания. В этом положении шар может свободно скатываться без изменения направления оси маховичка, т. е. без изменения направления вектора момента импульса $\boldsymbol{L}$. Во всяком другом положении для «нормального» скатывания ось маховичка, а с ней и вектор $\boldsymbol{L}$ должны менять свое направление в пространстве. «Упрямый» гироскоп этого «делать не хочет». Под действием силы тяжести шар гироскопа приобретает медленное вращение и скатывается с наклонной плоскости «боком», стремясь сохранить неизменной ориентацию оси маховичка в пространстве.

Если шар с вращающимся внутри него маховичком поставить на острие иглы даже в наклонном положении, то он не падает (рис. 149), а приобретает медленное вращение вокруг вертикальной оси под действием силы тяжести. Такое вращение называется *вынужденной прецессией*. Вынужденную прецессию мы рассмотрим в следующем параграфе.

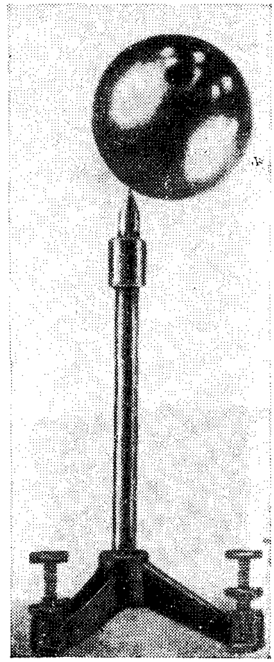

Рис. 149.

6. Посмотрим теперь, как изменится основное уравнение (49.3), если точка опоры гироскопа движется. Ответ можно получить из уравнения (37.2). Скорость каждой точки движущегося гироскопа представим в виде $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{v}_{\text{вр}}$, где $\boldsymbol{v}_O$ — скорость точки опоры O, а $\boldsymbol{v}_{\text{вр}} = [\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{r}]$ — скорость, возникающая из-за вращения вокруг этой точки. Тогда момент импульса гироскопа относительно точки опоры представится выражением

$$\boldsymbol{L} = \int dm\,[\boldsymbol{r}\boldsymbol{v}_O] + \boldsymbol{L}_{\text{вр}},$$

где $\boldsymbol{L}_{\text{вр}}$ — момент импульса, возникающий только из-за вращения. Если ввести радиус-вектор центра масс $\boldsymbol{r}_C$, то

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_{\text{вр}} + m\,[\boldsymbol{r}_C\boldsymbol{v}_O]. \tag{49.7}$$

Продифференцировав это выражение и подставив в формулу (37.2), получим

$$\dot{\boldsymbol{L}}_{\text{вр}} = \boldsymbol{M} - m\,[\boldsymbol{r}_C\dot{\boldsymbol{v}}_O]. \tag{49.8}$$

Эта формула показывает, что от движения точки опоры можно отвлечься. Но тогда к моменту действующих сил $\boldsymbol{M}$ надо прибавить момент «фиктивной силы», или «силы инерции» $\boldsymbol{F}_{\text{ин}} = -m\dot{\boldsymbol{v}}_O$, приложенной к центру масс гироскопа. Этот результат становится совершенно естественным, если отнести движение к системе отсчета, в которой точка опоры гироскопа неподвижна (см. гл. IX).

§ 50. Гироскоп под действием сил. Приближенная теория

1. Наиболее интересным видом движения гироскопа является *вынужденная прецессия*. Она возникает под действием внешних сил. Возьмем, например, гироскоп, изображенный на схематическом рис. 150. Он состоит из двух одинаковых маховичков, свободно насаженных на общую ось. Гироскоп устроен так, что он может свободно вращаться не только вокруг его оси фигуры OZ, но также