вращение и скатывается с наклонной плоскости «боком», стремясь сохранить неизменной ориентацию оси маховичка в пространстве.

Если шар с вращающимся внутри него маховичком поставить на острие иглы даже в наклонном положении, то он не падает (рис. 149), а приобретает медленное вращение вокруг вертикальной оси под действием силы тяжести. Такое вращение называется *вынужденной прецессией*. Вынужденную прецессию мы рассмотрим в следующем параграфе.

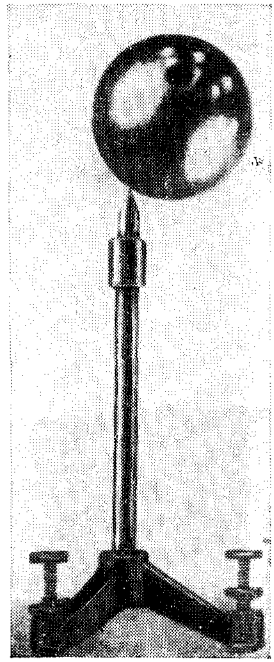


Рис. 149.

6. Посмотрим теперь, как изменится основное уравнение (49.3), если точка опоры гироскопа движется. Ответ можно получить из уравнения (37.2). Скорость каждой точки движущегося гироскопа представим в виде $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{v}_{\text{вр}}$, где $\boldsymbol{v}_O$ — скорость точки опоры O, а $\boldsymbol{v}_{\text{вр}} = [\boldsymbol{\omega r}]$ — скорость, возникающая из-за вращения вокруг этой точки. Тогда момент импульса гироскопа относительно точки опоры представится выражением

$$\boldsymbol{L} = \int dm\,[\boldsymbol{r}\boldsymbol{v}_O] + \boldsymbol{L}_{\text{вр}},$$

где $\boldsymbol{L}_{\text{вр}}$ — момент импульса, возникающий только из-за вращения. Если ввести радиус-вектор центра масс $\boldsymbol{r}_C$, то

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_{\text{вр}} + m\,[\boldsymbol{r}_C\boldsymbol{v}_O]. \qquad (49.7)$$

Продифференцировав это выражение и подставив в формулу (37.2), получим

$$\dot{\boldsymbol{L}}_{\text{вр}} = \boldsymbol{M} - m\,[\boldsymbol{r}_C\dot{\boldsymbol{v}}_O]. \qquad (49.8)$$

Эта формула показывает, что от движения точки опоры можно отвлечься. Но тогда к моменту действующих сил $\boldsymbol{M}$ надо прибавить момент «фиктивной силы», или «силы инерции» $\boldsymbol{F}_{\text{ин}} = -m\dot{\boldsymbol{v}}_O$, приложенной к центру масс гироскопа. Этот результат становится совершенно естественным, если отнести движение к системе отсчета, в которой точка опоры гироскопа неподвижна (см. гл. IX).

§ 50. Гироскоп под действием сил. Приближенная теория

1. Наиболее интересным видом движения гироскопа является *вынужденная прецессия*. Она возникает под действием внешних сил. Возьмем, например, гироскоп, изображенный на схематическом рис. 150. Он состоит из двух одинаковых маховичков, свободно насаженных на общую ось. Гироскоп устроен так, что он может свободно вращаться не только вокруг его оси фигуры OZ, но также и вокруг вертикальной и горизонтальной осей OY и OX. Про такой гироскоп говорят, что он имеет *три степени свободы*. Приложим в какой-либо точке A оси фигуры гироскопа постоянную силу $\boldsymbol{F}$, например, подвесим в этой точке небольшой груз P. Когда маховички гироскопа не вращаются, наблюдается привычное явление: под действием веса груза правый маховичок опускается, левый — поднимается.

Однако движение приобретает совсем иной характер, если предварительно маховички были приведены в быстрое вращение в одну и ту же сторону *). В этом случае ось фигуры гироскопа вместе с грузиком P не опускается, а начинает медленно вращаться с постоянной скоростью вокруг вертикальной оси OY. Такое вращение называется *вынужденной прецессией*. Вынужденная прецессия проще всего объясняется *приближенной теорией гироскопа*. Гироскопу всегда стремятся сообщить быстрое вращение вокруг оси его фигуры. Но вследствие различных причин гироскоп, вообще говоря, получает также вращение вокруг перпендикулярной оси. Специфические гироскопические эффекты проявляются тогда, когда это вращение является медленным по сравнению с вращением вокруг оси фигуры гироскопа. В приближенной теории им пренебрегают. В формуле (49.4) отбрасывают второе слагаемое, т. е. полагают

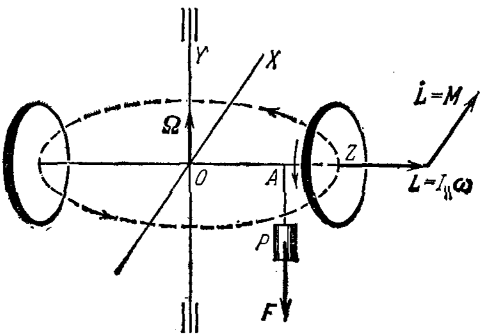


Рис. 150.

$$\boldsymbol{L} \approx I_{\parallel}\boldsymbol{\omega}_{\parallel} \approx I_{\parallel}\boldsymbol{\omega}. \tag{50.1}$$

В этом приближении векторы $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{L}$ не отличаются по направлению, оба они направлены вдоль оси фигуры гироскопа. Поэтому о движении оси его фигуры можно судить по изменению направления вектора $\boldsymbol{L}$, описываемому уравнением (49.3). Если рассматривать $\boldsymbol{L}$ как радиус-вектор, то производная $\dot{\boldsymbol{L}}$ геометрически может быть истолкована как скорость движения конца вектора $\boldsymbol{L}$. Допустим, что точка приложения внешней силы $\boldsymbol{F}$ лежит на оси фигуры гироскопа. Момент этой силы будет $\boldsymbol{M} = [\boldsymbol{aF}]$, где $\boldsymbol{a}$ — радиус-вектор, проведенный от точки опоры гироскопа к точке приложения силы $\boldsymbol{F}$.

*) В демонстрационных опытах маховичок гироскопа приводят в быстрое вращение, прижимая его обод к шкиву электромотора. Существуют гироскопы (например, волчки-компасы), которые сами представляют собой электродвигатели с вращающимся магнитным полем и приводятся во вращение трехфазным током.

В силу уравнения (49.3) вектор «скорости» $\dot{\boldsymbol{L}}$ будет перпендикулярен к оси фигуры гироскопа Z. Такой момент сил может изменить только направление вектора $\boldsymbol{L}$, а не его длину. Следовательно, если внешняя сила $\boldsymbol{F}$ постоянна, то вектор $\boldsymbol{L}$, а с ним и ось фигуры гироскопа должны совершать равномерное вращение вокруг оси OY. Это вращение и есть вынужденная прецессия. Вектор угловой скорости прецессии $\boldsymbol{\Omega}$ в рассматриваемом примере направлен вдоль оси OY.

Если один из маховичков (см. рис. 150) закрутить в одну, а другой — в противоположную сторону с той же угловой скоростью, то прецессии не возникает. В этом случае $\boldsymbol{L} = 0$, и под действием груза P гироскоп поворачивается вокруг горизонтальной оси OX, как если бы его маховички не вращались.

2. Найдем длину вектора $\boldsymbol{\Omega}$. Вектор $\boldsymbol{L}$ изменяется только вследствие вращения с угловой скоростью прецессии $\boldsymbol{\Omega}$. Для линейной скорости движения его конца, т. е. производной $\dot{\boldsymbol{L}}$, можно написать $\dot{\boldsymbol{L}} = [\boldsymbol{\Omega L}]$. Поэтому уравнение (49.3) дает

$$[\boldsymbol{\Omega L}] = \boldsymbol{M}. \tag{50.2}$$

Из этого уравнения и можно найти угловую скорость прецессии $\boldsymbol{\Omega}$. В нашем примере вектор $\boldsymbol{\Omega}$ перпендикулярен к оси фигуры гироскопа, а потому

$$\Omega = \frac{M}{L} = \frac{M}{I_{\|}\omega}. \tag{50.3}$$

Легко найти вектор $\boldsymbol{\Omega}$ и в более общем случае, когда ось фигуры гироскопа наклонена к оси, вокруг которой совершается его прецессия. Для этого подставим в уравнение (50.2) выражение $\boldsymbol{M} = [\boldsymbol{aF}] = a[\boldsymbol{sF}]$, где $\boldsymbol{s}$ — единичный вектор вдоль оси фигуры гироскопа. Так как приближенная теория пренебрегает различием направлений вектора $\boldsymbol{L}$ и оси фигуры гироскопа, то $\boldsymbol{L} = L\boldsymbol{s}$. В результате уравнение (50.2) преобразуется к виду

$$L[\boldsymbol{\Omega s}] = a[\boldsymbol{sF}].$$

Отсюда

$$\boldsymbol{\Omega} = -\frac{a}{L}\boldsymbol{F} = -\frac{a}{I_{\|}\omega_{\|}}\boldsymbol{F}. \tag{50.4}$$

Приведенные рассуждения справедливы при условии $\Omega \ll \omega$, т. е. для быстро вращающегося гироскопа. *Вращение гироскопа считается быстрым, если угловая скорость вращения вокруг его оси фигуры* $\omega_{\|}$ *очень велика по сравнению с угловой скоростью вращения вокруг перпендикулярной оси* $\omega_{\perp}$. В частности, она должна быть очень большой и по сравнению с угловой скоростью прецессии Ω. Для быстро вращающихся гироскопов, применяющихся в технике, величина Ω бывает в миллионы раз меньше ω.

3. Для демонстрации вынужденной прецессии совсем не обязательно, чтобы у гироскопа было два маховичка. Можно обойтись и одним маховичком. На рис. 151 изображен небольшой гироскоп с одним маховичком, подвешенный на нити. Вращающий момент $\boldsymbol{M}$ создается собственным весом $\boldsymbol{P}$ маховичка. Он и вызывает прецессию вокруг вертикальной оси. На схематическом рис. 152 тот же опыт воспроизведен в более крупном масштабе. Маховиком служит массивное велосипедное колесо с наращенной осью, приведенное в быстрое вращение. Колесо подвешивается на длинном проволочном канате за наращенный конец оси. Оси колеса придается приблизительно горизонтальное положение. Колесо прецессирует вокруг вертикальной оси под действием собственного веса. Опыт производит сильное впечатление.

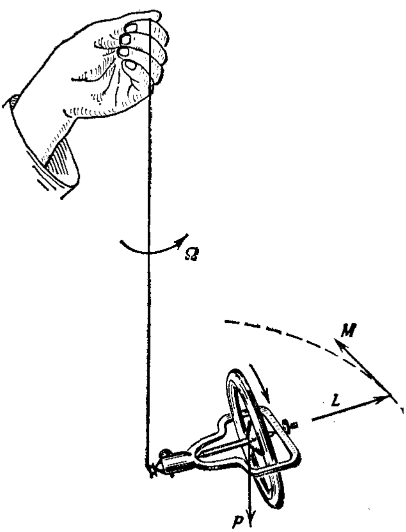


Рис. 151.

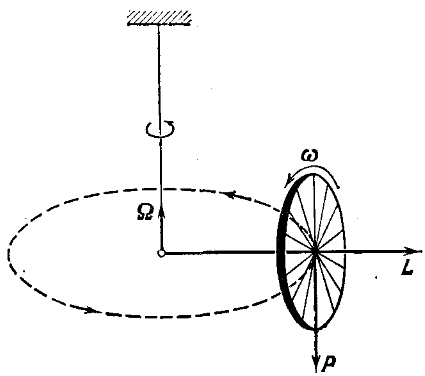


Рис. 152.

Уж очень неожиданным кажется движение колеса, когда оно не опускается под действием собственного веса, а непрерывно «уходит вбок».

4. Наконец, для наблюдения прецессии под действием собственного веса гироскопа нить также не обязательна. Можно взять симметричный гироскоп с неподвижной точкой опоры, расположенной на оси его фигуры. Точка опоры может находиться ниже центра масс (как в игрушечном волчке). Но она может находиться и выше центра масс. Тогда гироскоп называется *гироскопическим маятником*. В обоих случаях угловая скорость прецессии $\boldsymbol{\Omega}$ определяется формулой (50.4), в которой следует положить $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{g}$. Для периода прецессии $T = 2\pi/\Omega$ получаем

$$T = 2\pi \frac{I_{\parallel}\omega}{amg}. \qquad (50.5)$$

В случае гироскопического маятника время T называется его *периодом*. Этому периоду можно привести в соответствие *приведенную длину* l гироскопического маятника по формуле

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{50.6}$$

Она равна

$$l = \frac{I_{\parallel}^2 \omega^2}{m^2 a^2 g}. \tag{50.7}$$

При больших скоростях вращения ω и малых a приведенная длина гироскопического маятника может быть сделана очень большой, а его период доведен до десятков минут. Направление оси фигуры такого гироскопического маятника очень мало подвержено влиянию кратковременных сил и толчков. Гироскопические маятники применяются на самолетах и судах для создания искусственного горизонта (см. § 52) и искусственной вертикали.

Пример. Гироскоп одного из авиагоризонтов характеризуется следующими параметрами: $m = 5 \cdot 10^3$ г, $I_{\parallel} = 8 \cdot 10^4$ г·см², $a = 0{,}25$ см. Гироскоп делает 20 000 об/мин и, следовательно, его угловая скорость $\omega = 2094$ рад/с. Подставляя эти данные в формулы (50.6) и (50.7), получим $l = 180$ км, $T = 860$ с $=$ $= 14$ мин 20 с. Угловая скорость вынужденной прецессии меньше угловой скорости вращения вокруг оси фигуры гироскопа примерно в $1{,}7 \cdot 10^6$ раз.

5. Поведение гироскопа при вынужденной прецессии на первый взгляд противоречит закону сохранения энергии. Без грузика P ось фигуры гироскопа оставалась неподвижной (см. рис. 150). Как только был повешен грузик, сразу же возникало прецессионное движение. С этим движением связана дополнительная кинетическая энергия гироскопа. Откуда взялась эта энергия? Единственная сила, которая могла сообщить гироскопу эту кинетическую энергию, есть вес грузика P. Но эта сила направлена вниз, она перпендикулярна к направлению прецессионного движения и поэтому работы не производит. Детальный ответ на этот и аналогичные вопросы дает *точная теория гироскопа*, излагаемая в § 52. Здесь мы ограничимся предварительными, в основном качественными, соображениями.

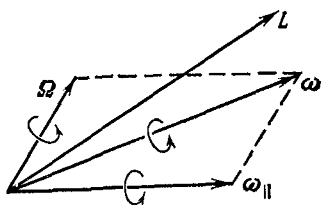


Рис. 153.

6. Исследуем сначала, как возбуждается регулярная прецессия. Допустим, что гироскоп приведен во вращение вокруг его оси фигуры с угловой скоростью $\omega_{\parallel}$. Пусть ось фигуры совершает дополнительное равномерное вращение с угловой скоростью Ω вокруг неподвижной оси, составляющей произвольный угол с осью фигуры (рис. 153). Выясним, при каких условиях возможно такое движение. К собственному вращению вокруг оси фигуры гироскопа с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ при рассматриваемом движении добавляется еще вращение вокруг той же оси с угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}_{\parallel}$. Кроме того, гироскоп совершает дополнительное вращение вокруг перпендикулярной оси с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_{\perp} = \boldsymbol{\Omega}_{\perp}$. Поэтому его момент количества движения будет $\boldsymbol{L} = I_{\parallel}(\boldsymbol{\omega}_{\parallel} + \boldsymbol{\Omega}_{\parallel}) + I_{\perp}\boldsymbol{\Omega}_{\perp}$. Найдем производную этого вектора по времени. Так как все три вектора $\boldsymbol{\omega}_{\parallel}$, $\boldsymbol{\Omega}_{\parallel}$ и $\boldsymbol{\Omega}_{\perp}$ равномерно вращаются с угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}$, то с той же угловой скоростью будет вращаться и вектор $\boldsymbol{L}$. Поэтому его производная по времени будет $\dot{\boldsymbol{L}} = [\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{L}]$. С другой стороны, уравнение моментов требует, чтобы $\dot{\boldsymbol{L}} = [\boldsymbol{\Omega}_{\text{прец}}\boldsymbol{L}]$, где $\boldsymbol{\Omega}_{\text{прец}}$ — угловая скорость регулярной прецессии под действием момента внешних сил $\boldsymbol{M} = [\boldsymbol{aF}]$. Она определяется уравнением (50.2). Отсюда следует, что рассматриваемое движение гироскопа возможно, т. е. совместимо с уравнениями механики, если $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}_{\text{прец}}$. Приведенное рассуждение является вполне точным. Оно показывает, что *вынужденная регулярная прецессия под действием постоянной силы* $\boldsymbol{F}$ *является одним из возможных точных видов движения, которые может совершать гироскоп.* Однако такое движение может возникнуть только при вполне определенных начальных условиях. В начальный момент надо, очевидно, сообщить вершине гироскопа начальную скорость $\boldsymbol{v}_0 = [\boldsymbol{\Omega s}]$, т. е. привести ось фигуры гироскопа в равномерное вращение с угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}$. Энергия, потребная для этого, сообщается внешним толчком, и никакого противоречия с законом сохранения не возникает. После прекращения действия толчка прецессионное движение гироскопа будет поддерживаться внешней силой $\boldsymbol{F}$. *Внешняя сила* таким образом, *не вызывает, а лишь поддерживает регулярную прецессию.*

Поведение гироскопа при вынужденной регулярной прецессии в известном смысле аналогично поведению шарика, привязанного на нити, при равномерном вращении по окружности. Сила натяжения нити тянет шарик к центру окружности, но шарик все время движется перпендикулярно к ней, непрерывно «уходит вбок». Сила натяжения нити не создает, а лишь поддерживает равномерное вращение по окружности. Для создания такого вращения шарику необходимо сообщить дополнительный толчок в боковом направлении. Сила натяжения меняет только направление, но не величину скорости. Если иметь в виду эту аналогию, то явление «ухода вбок» оси фигуры гироскопа при вынужденной регулярной прецессии представится, быть может, не таким уж странным, каким кажется оно на первый взгляд.

7. Приведенное исследование, однако, не отвечает на поставленный выше вопрос, касающийся сохранения энергии. Когда, например, мы вешаем грузик (см. рис. 150), то никакого начального толчка гироскопу при этом не сообщается. А между тем гироскоп начинает прецессировать. Ответ заключается в том, что в этом случае возникающая прецессия вовсе *не является регулярной.* На прецессионное движение вершины гироскопа накладываются мелкие вращения и дрожания ее. Они называются *нутациями.* В результате наложения нутаций на прецессионное движение вершина гироскопа описывает траектории *петлеобразного, циклоидального* или *синусообразного* типа, схематически изображенные на рис. 169, *а*—*в*. Вопрос этот будет разобран в § 52. Вид траектории зависит от начальной скорости, сообщенной оси фигуры гироскопа. Крупномасштабные нутации легко демонстрируются на опыте. Повесим на один из концов оси не очень быстро вращающегося гироскопа грузик (см. рис. 150). Если грузик отпустить без начального толчка, то траектория вершины будет циклоидального типа (см. рис. 169, *б*). Если же сообщить гироскопу боковой толчок против направления прецессии, вызываемой грузиком, то на траектории появятся петли (см. рис. 169, *а*). При сообщении бокового толчка в направлении прецессии траектория вершины становится синусообразной (см. рис. 169, *в*). В последнем случае при надлежащей силе толчка траектория может стать круговой, а сама прецессия — регулярной.

Когда мы вешаем грузик, то в первый момент он начинает опускаться под действием силы тяжести. Конец же вектора момента количества движения $\boldsymbol{L}$ приобретает скорость в боковом направлении в соответствии с уравнением $\dot{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{M}$. В результате вектор $\boldsymbol{L}$ перестает быть направленным вдоль оси фигуры гироскопа. Траектория вершины при опускании начинает загибаться вбок. Это и ведет к появлению нутаций. Работа силы тяжести при опускании грузика идет на приращение кинетической энергии прецессионно-нутационного движения. Достигнув нижнего положения, грузик начинает подниматься вверх, кинетическая энергия прецессионно-нутационного движения переходит в потенциальную энергию поднятого грузика. Таким образом, идет непрерывное превращение потенциальной энергии в кинетическую и обратно. Никакого нарушения закона сохранения энергии не получается.

Если нутации малы, то прецессия называется *псевдорегулярной*. Для быстро вращающихся технических гироскопов псевдорегулярная прецессия практически не отличается от регулярной. Здесь нутации представляют собой чрезвычайно мелкое и частое дрожание оси фигуры гироскопа, не имеющее никакого значения при изучении основного прецессионного движения (см. пример в § 52, п. 8). Кроме того, мелкомасштабные нутации быстро затухают под действием сил трения, и псевдорегулярная прецессия переходит в регулярную.

8. Существованием нутаций объясняется и другое поведение гироскопа, кажущееся парадоксальным. Согласно уравнению (49.3) момент импульса гироскопа $\boldsymbol{L}$ изменяется только тогда, когда на него действуют внешние силы. Если действие внешних сил прекращается, то мгновенно прекращается изменение вектора $\boldsymbol{L}$, а с ним и прецессия гироскопа. Ось фигуры гироскопа становится неподвижной. Не противоречит ли закону инерции такая *безынерционность* оси фигуры гироскопа? Действительно, такое противоречие существовало бы, если бы указанная безынерционность относилась к движению самой оси фигуры гироскопа. На самом деле эта безынерционность относится не к оси фигуры, а к вектору $\boldsymbol{L}$. К выводу о безынерционности движения оси фигуры приводит приближенная теория гироскопа, пренебрегающая нутациями. Мы видим, таким образом, что учет нутаций устраняет противоречия с законом инерции.

9. Согласно изложенному в п. 6 *вынужденная регулярная прецессия должна продолжаться неограниченно долго, если только момент внешних сил $\boldsymbol{M}$, поддерживающих ее, остается постоянным*. Например, под действием груза P гироскоп на рис. 150 должен был бы как угодно долго совершать прецессионное вращение вокруг вертикальной оси Y. При этом груз P все время должен был бы находиться на одной и той же высоте. На самом деле груз P медленно и непрерывно опускается. Это объясняется действием *сил трения* и других *тормозящих сил*. Они создают *тормозящий вращающий момент* $\boldsymbol{M}_1$, направленный вниз — в отрицательную сторону оси Y (см. рис. 150). Теперь полный момент внешних сил, действующих на гироскоп, будет $\boldsymbol{M}+\boldsymbol{M}_1$. Согласно основному уравнению (49.3) производная $\dot{\boldsymbol{L}}$, т. е. линейная скорость вращения конца вектора $\boldsymbol{L}$, направлена вдоль результирующего момента $\boldsymbol{M}+\boldsymbol{M}_1$. Она имеет вертикальную составляющую, направленную по $\boldsymbol{M}_1$. В результате этого конец вектора $\boldsymbol{L}$, а с ним и груз P будут опускаться. Можно сказать, что *тормозящий момент $\boldsymbol{M}_1$ вызывает дополнительную прецессию вокруг горизонтальной оси X, приводящую к опусканию груза P*.

Правильность такого объяснения легко подтвердить экспериментально. Будем подталкивать прецессирующий гироскоп, действуя против направления прецессионного вращения, вызванного грузом P. Груз начнет опускаться. Если, наоборот, подталкивать гироскоп в направлении прецессионного вращения, то груз поднимается. В первом случае мы создаем вращательный момент $\boldsymbol{M}_1$, направленный вниз, во втором — вверх. Он вызывает прецессионное вращение вокруг горизонтальной оси X, опуская или поднимая груз. Таким образом, *если пытаться ускорить прецессию, то гироскоп отвечает на эту попытку поднятием груза. Если же тормозить прецессионное движение, то это ведет к опусканию груза.*

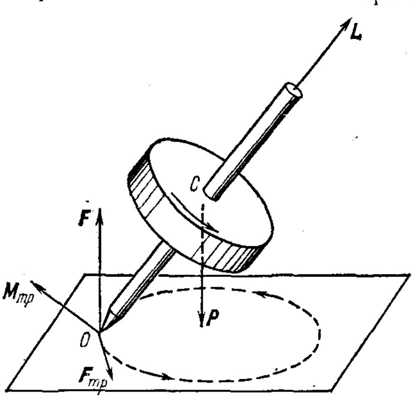
10. Интересно переформулировать полученное правило в свете общефизического *принципа Ле Шателье* (1850—1936). Согласно этому принципу, установленному его автором в результате рассмотрения отдельных примеров, *на всякое внешнее воздействие система отвечает такими изменениями, которые стремятся ослабить это воздействие.* Когда мы подвешиваем грузик к оси фигуры вращающегося гироскопа, последний отвечает на это воздействие прецессией. Такая прецессия с точки зрения принципа Ле Шателье и должна рассматриваться как реакция гироскопа, ослабляющая внешнее воздействие, т. е. не позволяющая грузику опускаться. Ясно, что если такую реакцию усилить, т. е. вынудить гироскоп прецессировать быстрее, то этот эффект *только усилится.* Иными словами, грузик *должен подниматься.* Наоборот, искусственное замедление прецессионного вращения гироскопа эквивалентно *ослаблению реакции его на воздействие грузика.* В результате такого замедления грузик *должен опускаться.* Изложенная точка зрения оказывается полезной, например, при рассмотрении различного рода стабилизирующих гироскопических приборов, когда надо быстро получить ответ на вопрос, как надо воздействовать на гироскоп, чтобы усилить его стабилизирующее действие.

11. В свете изложенного становится ясным и поведение гироскопа с *двумя степенями свободы.* Для того чтобы свободный гироскоп обладал устойчивостью, а гироскоп под действием внешних сил мог совершать вынужденную прецессию в том виде, как она описана выше, необходимо, чтобы он обладал *тремя степенями свободы,* т. е. мог свободно вращаться вокруг всех трех осей, проходящих через точку опоры O. Одной из таких осей является ось фигуры гироскопа. Вращение вокруг такой оси должно быть возможно во всех случаях. Иначе ни о каких гироскопических эффектах говорить не приходится. Закрепим гироскоп так, чтобы вращение вокруг одной из остальных двух осей сделалось невозможным. Тогда гироскоп становится системой с двумя степенями свободы. Пусть, например, уравновешенный гироскоп закреплен винтами так, что вращение вокруг вертикальной оси OY происходить не может (см. рис. 150). Если повесить грузик P, то гироскоп начнет вращаться вокруг горизонтальной оси OX как обычное твердое тело, а грузик P — опускаться в направлении действия силы веса $\boldsymbol{F}$. Это радикальное изменение поведения гироскопа так же объясняется обычным правилом прецессии. Сила $\boldsymbol{F}$ создает момент $\boldsymbol{M}$, стремящийся вызвать прецессию гироскопа вокруг вертикальной оси OY. Так как гироскоп закреплен, то эта прецессия развиться не может. Она вызовет лишь деформацию кручения вертикальной оси. Со стороны подшипников на эту закрученную ось начнет действовать вращающий момент, направленный вниз. Этот момент вызовет прецессию гироскопа — его вращение вокруг горизонтальной оси OX. Такому вращению ничто не препятствует. Поэтому указанная прецессия будет действительно происходить. В результате груз P начнет опускаться, что и наблюдается на опыте. Можно сказать, что закрученная ось тормозит прецессию, которая возникла бы под действием груза P, а такое торможение вызывает опускание груза.

Если, не вешая груза, толкнуть один из концов оси фигуры гироскопа вверх или вниз, то он будет продолжать по инерции вращаться в направлении сообщенного толчка вокруг горизонтальной оси OX. Дело опять в том, что во время действия толчка гироскоп стремится прецессировать вокруг вертикальной оси OY. Это приводит к деформации кручения вертикальиой оси. Крутящий момент, действуя на гироскоп, будет поднимать или опускать его вершину, т. е. вызовет прецессионное вращение гироскопа вокруг оси OX в направлении сообщенного толчка. Пока происходит такое вращение, вертикальная ось продолжает оставаться деформированной (закрученной).

Таким же путем легко исследовать, как будет вести себя гироскоп, лишенный возможности вращаться вокруг горизонтальной оси OX. Рекомендуем читателю разобраться в этом вопросе.

12. Обычно у волчка центр масс располагается выше точки опоры. Чтобы такой волчок не упал, ему надо сообщить достаточно быстрое вращение вокруг оси фигуры. При медленном вращении вертикальное положение оси фигуры становится неустойчивым, и волчок падает. Если волчок запустить наклонно, то его центр масс начинает подниматься, и волчок принимает вертикальное положение. Причиной этого являются силы трения, действующие в точке опоры.



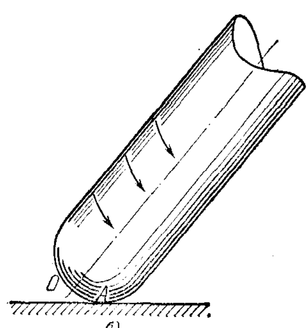


Рис. 154.

Посмотрим сначала, как двигался бы волчок, если бы трения не было. Пусть плоскость опоры горизонтальна и абсолютно гладкая. На волчок действуют две силы: сила веса $\boldsymbol{P}$ и сила нормального давления $\boldsymbol{F}$ со стороны плоскости опоры (рис. 154, a). Момент этих сил направлен горизонтально за плоскость рисунка. Этот момент вызовет прецессию волчка вокруг вертикальной оси. Для рассмотрения этой прецессии воспользуемся уравнением моментов относительно центра масс C. Оно имеет обычный вид (49.3). Пусть прецессия — регулярная. Тогда центр масс будет оставаться неподвижным, а потому $\boldsymbol{F}+\boldsymbol{P}=0$ в силу теоремы о движении центра масс. Момент силы нормального давления $\boldsymbol{F}$ заставит вершину волчка уходить за плоскость рисунка. Волчок будет прецессировать в том же направлении, в каком происходит его вращение вокруг оси фигуры. А так как центр масс C остается неподвижным, то точка опоры O будет описывать окружность в направлении, обозначенном стрелками.

Учтем теперь силы трения скольжения, возникающие при движении точки опоры по указанной окружности. Существенно, что результирующая этих сил $\boldsymbol{F}_{\text{тр}}$ направлена в ту же сторону, куда движется точка опоры волчка. Это станет ясно, если учесть, что конец ножки волчка, которым он опирается на плоскость опоры, не идеально острый, а закруглен. На рис. 154, *б* такой конец изображен в увеличенном масштабе. Если закрутить волчок вокруг оси фигуры, а затем поставить его на плоскость опоры, то в точке касания A возникнет скольжение. Ясно, что сила трения скольжения, действующая на ножку волчка, будет направлена против ее вращения, т. е. в ту же сторону, что и перемещение при прецессии точки опоры волчка. Заметим, что отмеченная особенность силы трения совершенно не зависит от того, как расположен центр масс относительно точки опоры. Сила трения скольжения $\boldsymbol{F}_{\text{тр}}$ всегда действует в направлении прецессии, вызванной весом волчка и давлением опоры, она стремится ускорить эту прецессию. Согласно общему правилу это должно привести к поднятию центра массы волчка. Если центр масс расположен выше точки опоры, то при таком поднятии ось фигуры волчка будет приближаться к вертикали.

Конечно, можно рассуждать и более детально. Предположим опять, что центр масс расположен выше точки опоры. Момент сил трения $\boldsymbol{F}_{\text{тр}}$ имеет вертикальную составляющую, направленную вверх. Он стремится вызвать прецессию вектора $\boldsymbol{L}$, в результате которой вершина волчка должна подниматься. При неподвижности центра масс C такой подъем вызвал бы опускание точки опоры O. Но такому опусканию препятствует плоскость опоры, и оно происходить не может. Стремление к опусканию точки опоры проявится в возрастании силы нормального давления $\boldsymbol{F}$. Последняя начнет превосходить силу веса $\boldsymbol{P}$. Результирующая этих двух сил становится отличной от нуля. Она направлена вверх и приводит к поднятию центра масс C, т. е. к выпрямлению оси волчка.

Сила трения $\boldsymbol{F}_{\text{тр}}$, действующая в точке опоры волчка, проявляется и в других явлениях. Она не только замедляет осевое вращение волчка, но и заставляет двигаться его центр масс. Волчок начинает бегать по плоскости опоры. Если бы не было других тормозящих сил (например, сопротивления воздуха и пр.), то такое движение непрерывно ускорялось бы. (Это лишний раз подтверждает, что направление силы $\boldsymbol{F}_{\text{тр}}$ совпадает с направлением движения волчка.) При этом скольжение постоянно уменьшается, и движение волчка в конце концов переходит в чистое качение. К этому моменту осевое вращение волчка обычно замедляется настолько сильно, что он теряет устойчивость и падает под действием силы тяжести.

13. Поднятие оси волчка можно объяснить и с помощью уравнения моментов относительно точки опоры O. Надо только принять во внимание, что точка опоры движется ускоренно, и брать уравнение моментов в виде (49.8). Короче говоря, надо учесть действие «сил инерции» (см. §§ 63 и 64), возникающих из-за ускоренного движения точки опоры. В разбираемом нами вопросе играет роль сила инерции, обусловленная касательным ускорением. Эта «сила» приложена к центру масс C и направлена противоположно касательному ускорению, т. е. на рис. 154, *а* — от читателя. Ее момент относительно точки опоры O имеет вертикальную составляющую, направленную вверх. Этот момент вызывает прецессию, в результате которой вершина волчка поднимается.

14. Случай, когда центр масс лежит ниже точки опоры, рассматривается совершенно аналогично. Силы трения скольжения, возникающие в точке опоры, и в этом случае приводят к поднятию центра масс. Однако здесь оно сопровождается опусканием вершины волчка. Волчок, запущенный наклонно, наклоняется еще больше.

15. Любопытным примером может служить *китайский волчок*, который имеет форму гриба (рис. 155). Из-за действия сил трения центр масс волчка непрерывно поднимается, а ось фигуры все более и более наклоняется. В конце концов это приводит к *опрокидыванию* волчка. Волчок становится на ножку. Ось фигуры все более и более приближается к вертикальному положению, если только волчок не потеряет устойчивость из-за замедления осевого вращения.

16. Для того чтобы повернуть ось фигуры гироскопа, к нему надо приложить силы, момент которых $\boldsymbol{M}$ определяется уравнением (50.2), в котором под $\boldsymbol{\Omega}$ следует понимать угловую скорость вынужденного вращения. Такие силы создаются, например, давлением подшипников на ось фигуры гироскопа. Ось фигуры гироскопа действует на подшипники с равными и противоположно направленными силами противодавления. Эти силы противодавления и создаваемые ими вращающие моменты называются *гироскопическими* *). Гироскопические силы легко почувствовать, если взять за ось быстро вращающееся велосипедное колесо и попытаться повернуть эту ось. Колесо будет стремиться «вырваться из рук» в перпендикулярном направлении. При быстром повороте требуется значительное усилие, чтобы удержать ось в руках.

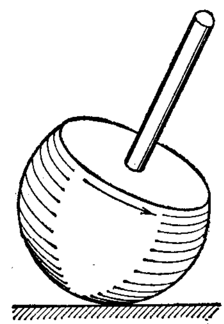


Рис. 155.

В опыте со скамьей Жуковского (§ 34, п. 7) демонстратор, поворачивающий ось велосипедного колеса, испытывает с его стороны гироскопические силы. Момент этих сил направлен вертикально. Они и приводят во вращение скамью или изменяют ее угловую скорость. Гироскопические силы действуют на подшипники вала турбины корабля или винта самолета, когда при маневрах корабля и самолета, направления их движения изменяются быстро. Они вызывают «рыскание по курсу». Для крупных судов это явление незаметно, оно наблюдается у мелких судов и самолетов.

17. Поднесем к оси гироскопа, изображенного на рис. 148, горизонтальный стержень. (Ось фигуры гироскопа изображена на рис. 156, *а*. Сечение стержня плоскостью рисунка изображено заштрихованным кружком. Предполагается, что стержень перпендикулярен к плоскости рисунка.) Возникает сила трения скольжения, $\boldsymbol{F}_{\text{тр}}$, параллельная стержню и, следовательно, перпендикулярная к плоскости рисунка. Она изображена пунктирной стрелкой. Момент этой силы относительно точки опоры $\boldsymbol{M}_{\text{тр}} = [\boldsymbol{r}\boldsymbol{F}_{\text{тр}}]$ лежит в плоскости рисунка и направлен перпендикулярно к стержню и радиусу-вектору $\boldsymbol{r}$. Он будет стремиться вызвать прецессию оси гироскопа в том же направлении. Но эта прецессия возникнуть не может, так как ей препятствует стержень. Она проявится только в том, что ось гироскопа будет прижиматься к стержню. В результате возникает сила давления $\boldsymbol{F}_{\text{дав}}$, действующая со стороны стержня на ось гироскопа. Действие этой силы проявится, во-первых, в увеличении силы $\boldsymbol{F}_{\text{тр}}$. Во-вторых, она вызовет прецессию оси фигуры гироскопа, заставляя эту ось перемещаться вдоль стержня в ту же сторону, куда направлена сила $\boldsymbol{F}_{\text{тр}}$, так как момент силы давления $\boldsymbol{M}_{\text{дав}} = [\boldsymbol{r}\boldsymbol{F}_{\text{дав}}]$ направлен в ту же сторону. Возрастание силы $\boldsymbol{F}_{\text{тр}}$ в свою очередь приведет к возрастанию силы $\boldsymbol{F}_{\text{дав}}$ и к ускорению прецессионного перемещения оси фигуры гироскопа вдоль стержня. Это ускорение прекратится, когда движения оси фигуры со скольжением перейдет в чистое качение. (В описываемом нами опыте для этого может не хватить времени из-за изменения наклона оси фигуры гироскопа при движении.) Начиная с этого момента сила $\boldsymbol{F}_{\text{тр}}$ практически обратится в нуль, сила $\boldsymbol{F}_{\text{дав}}$ станет постоянной, а прецессионное движение оси фигуры гироскопа вдоль стержня — равномерным.

---

*) Термин «гироскопические силы» употребляется здесь в ином смысле, чем в § 24.

Вместо стержня можно взять какой-либо замкнутый или незамкнутый контур произвольной формы из толстой проволоки. Для демонстрационных опытов может служить контур, изображенный на рис. 156, *б*. Контур закрепляется на штативе в горизонтальном положении вблизи оси фигуры гироскопа. Если ось фигуры своим верхним концом привести в соприкосновение с контуром, то она начинает бегать по этому контуру, переходя последовательно из положения *1*

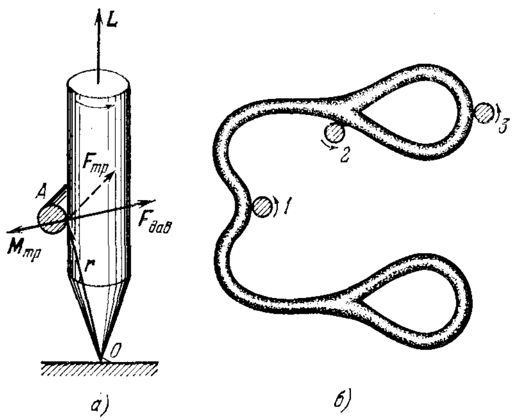


Рис. 156.

в положения *2*, *3* и т. д. При этом ось фигуры гироскопа сильно прижимается к контуру. Это очень красивый демонстрационный опыт. Описанное явление называется *периметрическим движением* гироскопа.

ЗАДАЧИ

1. Герой романа Жюля Верна «Вверх дном» предлагал повернуть земную ось, выпустив с Земли тяжелый снаряд. Оценить, с какой минимальной скоростью v нужно выпустить на полюсе Земли снаряд массы $m = 1000$ т, чтобы повернуть в пространстве мгновенную ось вращения Земли на угол $\alpha = 1°$. Масса Земли $M = 6 \cdot 10^{21}$ т. Длина градуса земного меридиана $l = 111$ км. Землю считать однородным шаром (см. задачи 23 и 24 к § 37).

Решение. Максимальный поворот получится, когда скорость снаряда v перпендикулярна к земной оси. Снаряд уносит момент импульса $L = \dfrac{m\,[r\boldsymbol{v}]}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$, перпендикулярный к скорости $\boldsymbol{v}$. Земля получает такой же момент в обратном направлении. При этом вектор угловой скорости вращения Земли $\boldsymbol{\omega}$ отклоняется вбок на угол $\alpha = L/I\omega$. Подставив сюда $I = {}^2/_5 Mr^2$ и учтя, что разность $c - v$ очень мала, получим

$$\frac{c-v}{c} \approx \frac{25m^2c^2}{8M^2l^2\omega^2} \approx 1{,}9 \cdot 10^{-22}.$$

2. Симметричный волчок, ось фигуры которого наклонена под углом α к вертикали (см. рис. 154), совершает регулярную прецессию под действием силы тяжести. Точка опоры волчка O неподвижна. Определить, под каким углом β к вертикали направлена сила, с которой волчок действует на плоскость опоры.

Ответ. $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{a^3m^2g\sin\alpha}{I_{\parallel}^2\,\omega^2}$.

3. Гироскопический маятник, используемый в качестве авиагоризонта, характеризуется параметрами, приведенными в п. 4 этого параграфа. Когда самолет двигался равномерно, ось фигуры маятника была вертикальна. Затем в течение времени $\tau = 10$ с самолет двигался с горизонтальным ускорением $\dot{v}_0 = 1$ м/с^2. Определить угол α, на который отклонится от вертикали ось фигуры гироскопического маятника за время ускорения.

Ответ. $\alpha \approx \dfrac{ma\dot{v}_0\tau}{I_{\parallel}\omega} \approx 0{,}43° \approx 25'$.

4. Однородный гладкий сплошной шар, находящийся на горизонтальном столе, быстро вертится вокруг своего вертикального диаметра с угловой скоростью ω_0 (рис. 157). В него ударяет второй, в точности такой же шар. Происходит абсолютно упругий удар без передачи вращения. Ударяемый шар начинает двигаться по столу со скольжением. Коэффициент трения скольжения k считается не зависящим от скорости. Найти угол α между мгновенной осью вращения ударяемого шара и вертикальной линией для любого момента времени t, когда еще не прекратилось скольжение.

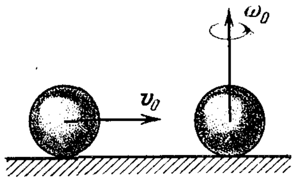


Рис. 157.

Найти также значение этого угла в момент, когда движение переходит в чистое качение. Трением верчения и трением качения пренебречь.

Решение. После удара центр ударяемого шара начнет двигаться с начальной скоростью v_0. По теореме о движении центра масс его скорость в момент времени t будет $v = v_0 - kgt$. Пусть $\boldsymbol{\omega}$ — мгновенное значение вектора угловой скорости. Момент силы трения относительно центра шара будет $kmgr\boldsymbol{i}$, где $\boldsymbol{i}$ — единичный вектор, направленный за плоскость рисунка и перпендикулярный к ней. Из уравнения моментов $I\dfrac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = kmgr\,\boldsymbol{i}$ получаем $\dfrac{2}{5}r\dfrac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = kg\boldsymbol{i}$. Отсюда $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0 + 5kgt\boldsymbol{i}/(2r)$. Мгновенная ось вращения всегда лежит в плоскости, перпендикулярной к плоскости рисунка. Угол α определяется уравнением $\operatorname{tg}\alpha = 5kgt/(2r\omega_0)$. Определим теперь момент начала чистого качения. Скорость поступательного движения шара зависит только от горизонтальной составляющей вектора $\boldsymbol{\omega}$. Момент начала чистого качения найдется из условий $^5/_2 kgt = v_0 - kgt$. С этого момента угол α становится и продолжает оставаться постоянным, причем $\operatorname{tg}\alpha = {^5/_7} v_0/r\omega_0$. Если $v_0 = \omega_0 r$, то $\operatorname{tg}\alpha = {^5/_7}$, $\alpha = 35°32'$. Вращение шара вокруг фиксированного диаметра неустойчиво. Поэтому найденное решение определяет поворот оси вращения относительно *внешнего пространства*, а не внутри самого шара.

5. Гироскоп, изображенный на рис. 148, совершает установившееся периметрическое движение по круглому металлическому кольцу радиуса R, плоскость которого горизонтальна. Радиус стержня гироскопа r мал по сравнению с R ($r \ll R$). Ось гироскопа наклонена к вертикали под углом α. (В рассматриваемом случае она движется по поверхности кругового конуса с вершиной в точке опоры O.) Найти силу $F_{\text{дав}}$, с которой стержень гироскопа давит на металлическое кольцо.

Решение. В установившемся режиме периметрическое движение оси фигуры гироскопа есть чистое качение. Если $r \ll R$, то угловая скорость прецессии найдется из условия $\Omega R = \omega r$. Пользуясь этим, легко найти искомую силу:

$$F_{\text{дав}} = \frac{I_{\parallel}\omega^2 r}{R^2}\sin^2\alpha.$$

Пусть $\omega = 100$ об/с $= 628$ рад/с, $I_{\parallel} = 2\cdot 10^4$ г·см^2, $r = 0{,}5$ см, $R = 8$ см, $\alpha = 20°$. Тогда $F_{\text{дав}} \approx 70$ Н.

6. Гироскопические эффекты используются в дисковых мельницах. Массивный цилиндрический каток (бегун), могущий вращаться вокруг своей геометрической оси, приводится во вращение вокруг вертикальной оси (с угловой скоростью Ω) и катится по горизонтальной опорной плите (рис. 158). Такое вращение можно рассматривать как вынужденную прецессию гироскопа, каковым является бегун. При вынужденной прецессии возрастает сила давления бегуна на горизонтальную плиту, по которой он катится. Эта сила растирает и измельчает материал, подсыпаемый под каток на плиту. Вычислить полную силу давления катка на опорную плиту.

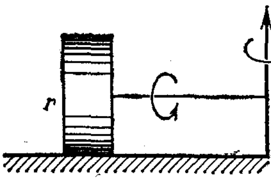


Рис. 158.

Ответ. $F_{\text{дав}} = P + \dfrac{I_{\parallel}\Omega^2}{r} = P + \dfrac{1}{2}m\Omega^2 r$, где P — вес бегуна, m — его масса, r — радиус. Пусть $r = 50$ см. Тогда при рабочей скорости 1 об/с и, следовательно, $\Omega = 2\pi$ рад/с получаем $^1/_2\, m\Omega^2 r \approx mg = P$. Следовательно, $F_{\text{дав}} \approx 2P$. Обратить внимание, что полный момент импульса $\boldsymbol{L}$ не направлен вдоль оси фигуры бегуна, так как имеется еще момент, возникающий из-за вращения вокруг вертикальной оси. Однако последний момент остается неизменным при вращении катка, а потому при решении задачи его можно не принимать во внимание.

7. Диск радиуса r, вращающийся вокруг собственной оси с угловой скоростью ω, катится без скольжения в наклонном положении по горизонтальной плоскости, описывая окружность за время T. Определить T и радиус окружности R, если $R \gg r$, а угол между горизонтальной плоскостью и плоскостью диска равен α.

Ответ. $T = \dfrac{3\pi\omega r}{g}\operatorname{tg}\alpha$, $\quad R = \dfrac{3}{2}\dfrac{\omega^2 r^2}{g}\operatorname{tg}\alpha$.

§ 51. Применения гироскопов

1. Научно-технические применения гироскопов весьма разнообразны. В курсе физики о них можно дать лишь общее представление. Рассмотрим принципы действия некоторых *гироскопических приборов,* совершенно отвлекаясь от деталей конструктивного или технического характера. Будем предполагать, что все приборы и условия, в которых они работают, являются *идеальными.* Так, будем считать, что сил трения и прочих вредных сил нет, что моменты инерции и моменты импульса кардановых колец пренебрежимо малы и т. д. В действительности все эти факторы оказывают существенное, иногда решающее, влияние на поведение реального гироскопа. Однако мы ограничиваем свою задачу выяснением лишь основных идей и принципов, на которых основано действие гироскопических приборов.

2. Начнем с *уравновешенного* (*астатического*) гироскопа с тремя степенями свободы. Пусть он быстро вращается вокруг своей оси фигуры. На направление оси фигуры гироскопа не оказывают влияния сила тяжести, вращение Земли, а также любые ускоренные движения точки опоры. В отсутствие сил, создающих вращающие моменты относительно точки опоры, ось фигуры уравновешенного гироскопа сохраняла бы неизменное направление относительно звезд. Если ось фигуры гироскопа направить на какую-либо звезду, то при перемещении последней по небесному своду она будет поворачиваться относительно Земли, оставаясь все время направленной на ту же звезду. Такой гироскоп позволяет обнаружить суточное вращение Земли, что и было впервые качественно продемонстрировано французским физиком Леоном Фуко (1819—1868). Трудности подобных опытов очень велики. Они связаны с тем, что невозможно полностью освободиться от