

Пусть $\omega = 100 \text{ об/с} = 628 \text{ рад/с}$, $I_{||} = 2 \cdot 10^4 \text{ г} \cdot \text{см}^2$, $r = 0,5 \text{ см}$, $R = 8 \text{ см}$, $\alpha = 20^\circ$. Тогда $F_{\text{дав}} \approx 70 \text{ Н}$.

6. Гироскопические эффекты используются в дисковых мельницах. Массивный цилиндрический каток (бегун), могущий вращаться вокруг своей геометрической оси, приводится во вращение вокруг вертикальной оси (с угловой скоростью Ω) и катится по горизонтальной опорной плите (рис. 158). Такое вращение можно рассматривать как вынужденную прецессию гироскопа, каковым является бегун. При вынужденной прецессии возрастает сила давления бегуна на горизонтальную плиту, по которой он катится. Эта сила растирает и измельчает материал, подсыпaeмый под каток на плиту. Вычислить полную силу давления катка на опорную плиту.

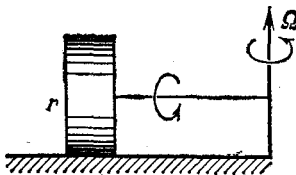


Рис. 158.

$$\text{О т в е т. } F_{\text{дав}} = P + \frac{I_{||} \Omega^2}{r} = P + \frac{1}{2} m \Omega^2 r,$$

где P — вес бегуна, m — его масса, r — радиус. Пусть $r = 50 \text{ см}$. Тогда при рабочей скорости 1 об/с и, следовательно, $\Omega = 2\pi \text{ рад/с}$ получаем $\frac{1}{2} m \Omega^2 r \approx mg = P$. Следовательно, $F_{\text{дав}} \approx 2P$. Обратите внимание, что полный момент импульса L не направлен вдоль оси фигуры бегуна, так как имеется еще момент, возникающий из-за вращения вокруг вертикальной оси. Однако последний момент остается неизменным при вращении катка, а потому при решении задачи его можно не принимать во внимание.

7. Диск радиуса r , вращающийся вокруг собственной оси с угловой скоростью ω , катится без скольжения в наклонном положении по горизонтальной плоскости, описывая окружность за время T . Определить T и радиус окружности R , если $R \gg r$, а угол между горизонтальной плоскостью и плоскостью диска равен α .

$$\text{О т в е т. } T = \frac{3\pi\omega r}{g} \operatorname{tg} \alpha, \quad R = \frac{3}{2} \frac{\omega^2 r^2}{g} \operatorname{tg} \alpha.$$

§ 51. Применения гироскопов

1. Научно-технические применения гироскопов весьма разнообразны. В курсе физики о них можно дать лишь общее представление. Рассмотрим принципы действия некоторых *гироскопических приборов*, совершенно отвлекаясь от деталей конструктивного или технического характера. Будем предполагать, что все приборы и условия, в которых они работают, являются *идеальными*. Так, будем считать, что сил трения и прочих вредных сил нет, что моменты инерции и моменты импульса карданных колец пренебрежимо малы и т. д. В действительности все эти факторы оказывают существенное, иногда решающее, влияние на поведение реального гироскопа. Однако мы ограничиваем свою задачу выяснением лишь основных идей и принципов, на которых основано действие гироскопических приборов.

2. Начнем с *уравновешенного (астатического)* гироскопа с тремя степенями свободы. Пусть он быстро вращается вокруг своей оси фигуры. На направление оси фигуры гироскопа не оказывают влияния сила тяжести, вращение Земли, а также любые ускоренные движения точки опоры. В отсутствие сил, создающих вращающие моменты относительно точки опоры, ось фигуры уравновешенного гироскопа сохраняла бы неизменное направление относительно звезд. Если ось фигуры гироскопа направить на какую-либо звезду, то при перемещении последней по небесному своду она будет поворачиваться относительно Земли, оставаясь все время направленной на ту же звезду. Такой гироскоп позволяет обнаружить суточное вращение Земли, что и было впервые качественно продемонстрировано французским физиком Леоном Фуко (1819—1868). Трудности подобных опытов очень велики. Они связаны с тем, что невозможно полностью освободиться от

неизбежного трения в подшипниках карданова подвеса и других вредных сил, создающих вращающие моменты относительно центра подвеса.

3. Свойство уравновешенного гироскопа сохранять неизменным направление оси своей фигуры используется для автоматического управления движением самодвижущихся мин (торпед), самолетов, судов, ракет и прочих аппаратов. Момент импульса гироскопа $L = I_{\omega}$ должен быть достаточно большим, чтобы уменьшить влияние трения в подшипниках карданова подвеса и прочих вредных сил. Ось фигуры вращающегося гироскопа задает курс движения аппарата. При всяком отклонении аппарата от курса (например, вследствие удара волн или действия порывов ветра) направление оси фигуры гироскопа в пространстве сохраняется. Значит, ось фигуры гироскопа вместе с рамами карданова подвеса поворачивается относительно движущегося аппарата. Поворот рам карданова подвеса с помощью тех или иных приспособлений включает двигатели, приводящие в действие *рули управления*. Последние и возвращают движение аппарата к заданному курсу. В случае торпеды, поскольку ее движение совершается в горизонтальной плоскости (по поверхности моря), достаточно одного гироскопа, с осью фигуры, ориентированной в направлении движения. В случае самолета требуются два гироскопа. Один, с вертикальной осью, задает горизонтальную плоскость, в которой должен оставаться самолет. Другой, с горизонтальной осью, ориентированной вдоль оси самолета, задает его курс. Такими *«автопилотами»*, освобождающими летчика от необходимости непрерывного управления самолетом, оборудованы почти все современные самолеты, предназначенные для длительных полетов.

4. Важным применением неуравновешенного гироскопа с тремя степенями свободы является создание *искусственных горизонта и вертикали*. Это необходимо в навигации в условиях отсутствия видимости линии горизонта. Направление вертикали в каждом месте земного шара можно просто определить с помощью обыкновенного маятника, применяемого в качестве отвеса. Однако такой способ не годится на корабле или самолете ввиду неизбежных ускорений, которые они получают при наборе скорости, поворотах, качке и пр. В этих случаях вместо обыкновенного маятника используется *гироскопический маятник (гирогоризонт)* с очень большой приведенной длиной (см. § 50, п. 4). При отсутствии ускорений ось гироскопического маятника устанавливается вертикально. Если аппарат движется ускоренно, то появляется прецессия, уводящая ось маятника от вертикального положения. Однако если период прецессии T очень велик, а время ускорения мало по сравнению с T , то за это время прецессия, ввиду ее медленности, не успеет заметно отклонить ось гиромаятника от вертикали (см. задачу 3 к § 50). Эти условия соблюдаются, например, при поворотах движущегося аппарата. Время поворота всегда мало по сравнению с периодом T . Еще менее чувствителен гиромаятник к качке корабля. Период качки всегда много меньше периода прецессии T , а главное, при качке ускорение за время T многократно и периодически меняет знак. Качка приводит лишь к малозаметным колебаниям оси гироскопического маятника около вертикального положения. Наиболее неблагоприятно на направление оси гиромаятника влияет увеличение или уменьшение скорости, которые могут длиться значительное время и вызывать, хотя и не очень большие, но все же заметные отклонения оси фигуры гироскопа.

5. Важнейшим применением гироскопа является *гироскопический компас*, получивший широкое распространение на кораблях. Обычный магнитный компас подвержен действию разнообразных возмущений земного магнитного поля (магнитные бури). На его показания влияют возмущения магнитного поля, вызываемые большими массами железа на корабле, а также различные электродинамические воздействия со стороны сложного электротехнического оборудования корабля. В этих условиях использование магнитного компаса на корабле и становится практически невозможным. Гироскопический компас свободен от этих недостатков.

Идея гироскопического компаса впервые была высказана Фуко в 1852 г. Он предложил для этой цели использовать гироскоп с *двумя степенями свободы*

в кардановом подвесе. Чтобы лучше уяснить идею гироскопического компаса, а также некоторых других гироскопических приборов, поставим вопрос шире и исследуем, как ведет себя гироскоп, закрепленный на вращающемся основании.

6. Закрепим неподвижно наружное кольцо карданова подвеса (см. рис. 144). Гироскоп будет лишен той устойчивости, какая была свойственна ему, когда он обладал тремя степенями свободы. Причина этого, как было выяснено в предыдущем параграфе, заключается в том, что закрепление наружного кольца лишает гироскоп возможности совершать прецессию вокруг вертикальной оси. Утраченную степень свободы можно, однако, в известной степени восстановить, если закрепить наружное карданово кольцо на основании, которое может свободно вращаться вокруг вертикальной оси. Такое закрепление просто эквивалентно увеличению момента инерции наружного кольца. Подвесим к оси гироскопа грузик. Он вызовет прецессионное вращение вокруг вертикальной оси. Это вращение передается основанию, на котором закреплено карданово кольцо. Благодаря наличию у основания собственного момента инерции угловая скорость вращения его Ω будет меньше угловой скорости Ω_0 , с которой прецессировал бы гироскоп, если бы он не был закреплен. Наличие основания, таким образом, ведет к торможению прецессии, вызванной грузиком. По этой причине грузик будет опускаться (см. § 50, пп. 9 и 10). Если, воздействуя на основание, увеличить угловую скорость его вращения, чтобы она сделалась равной Ω_0 , то при прецессии грузик будет оставаться на постоянной высоте. Если же основание вращать со скоростью, большей Ω_0 , то грузик начнет подниматься, пока ось фигуры гироскопа не примет вертикальное положение, причем положительный конец ее будет обращен вверх. При вращении со скоростью $\Omega < \Omega_0$ или в противоположном направлении ось фигуры установится также вертикально, но положительный конец ее будет обращен вниз. Описанное поведение гироскопа объясняется тем, что гироскоп вместе с основанием

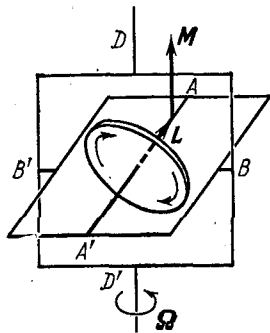


Рис. 159.

вынужден вращаться вокруг вертикальной оси с угловой скоростью ω , отличной от скорости Ω_0 , с которой он прецессировал бы только под действием веса грузика. Благодаря этому возникает деформация кручения вертикальной оси $D'D$ (см. рис. 144). Деформация кручения создает вращающий момент M , параллельный той же оси. Под действием этого момента возникает прецессионное вращение вокруг горизонтальной оси $B'B$, в результате которого ось гироскопа устанавливается вертикально в том или ином направлении, в зависимости от того, с какой скоростью и в какую сторону вращается основание. Такая ориентация оси фигуры гироскопа будет наблюдаться и в предельном случае, когда масса грузика равна нулю, т. е. когда грузика нет и $\Omega_0 = 0$. Легко сообразить, что в этом случае ось фигуры гироскопа устанавливается параллельно оси вращения основания и притом так, что оба вращения совершаются в одинаковых направлениях (правило Фуко). Про такие оси говорят, что они *однонаправленно параллельны*.

Все это легко демонстрировать с помощью небольшого гироскопа в кардановом подвесе. Для большей наглядности мы заменили на рис. 159 круглые кольца прямоугольными рамками. Раскрутив гироскоп вокруг оси фигуры, возьмемся руками за внешнюю рамку и будем медленно поворачивать ее вокруг вертикальной оси. Ось гироскопа примет вертикальное положение и притом такое, что оба вращения — вращение рамки и вращение гироскопа вокруг собственной оси — будут происходить в одну и ту же сторону. Если начать вращать рамку в противоположном направлении, то произойдет «прокидывание» гироскопа, т. е. поворот оси его фигуры вокруг горизонтальной оси $A'A$ на 180° . В результате оба вращения будут снова совершаться в одном направлении. И такое опрокидывание гироскопа будет наблюдаться всякий раз, когда мы меняем

направление вращения наружной рамки. Во время опрокидывания гироскопа демонстратор испытывает заметное воздействие гироскопических сил, стремящихся повернуть его вокруг горизонтальной оси, перпендикулярно к плоскости наружной рамки.

В другой демонстрации уравновешенный гироскоп с двумя степенями свободы ставят на горизонтальный диск, который может вращаться вокруг вертикальной

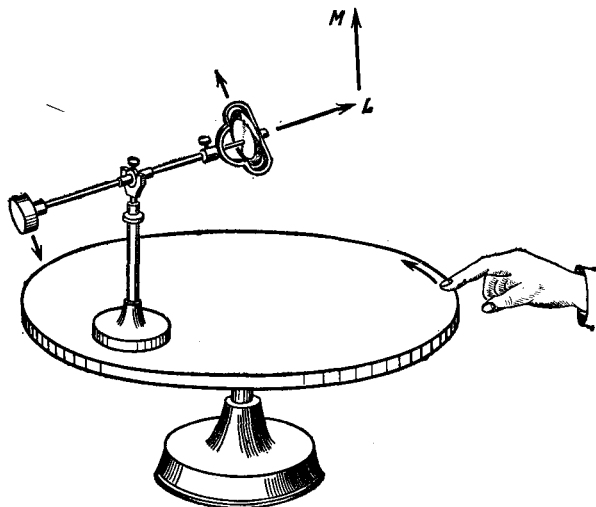


Рис. 160.

оси (рис. 160). При вращении диска ось гироскопа становится вертикально. При изменении направления на противоположное гироскоп опрокидывается.

7. Рассмотрим теперь идею гироскопического компаса, предложенную Фуко. Пусть наружное кольцо в кардановом подвесе гироскопа может свободно вращаться вокруг вертикальной оси $D'D$ (см. рис. 159). Внутреннее кольцо жестко закреплено в наружном под прямым углом. При этих условиях ось фигуры гироскопа $A'A$ вынуждена оставаться в горизонтальной плоскости, совпадающей с плоскостью внутреннего кольца. Она может свободно вращаться в этой плоскости вокруг вертикальной оси $D'D$. Гироскоп ставится на горизонтальную подставку. Последняя, конечно, участвует в суточном вращении Земли. Пусть Ω — угловая скорость вращения Земли вокруг своей оси. Разложим вектор Ω на вертикальную Ω_v и горизонтальную Ω_r составляющие. Вертикальная составляющая не влияет на поведение гироскопа, так как вокруг вертикальной оси он может вращаться совершенно свободно. Поэтому от наличия Ω_v можно отвлечься. Горизонтальная составляющая Ω_r лежит в плоскости меридиана, т. е. направлена вдоль *полуденной линии*. Таким образом, на поведении гироскопа сказывается вращение Земли лишь вокруг полуденной линии рассматриваемого места. Пусть плоскость рис. 161 совпадает с горизонтальной плоскостью. Разложим вектор Ω_r на составляющую вдоль оси фигуры гироскопа Ω_1 и составляющую Ω_2 , к ней

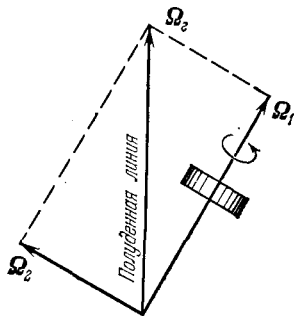


Рис. 161.

перпендикулярную. Первая составляющая на движение гироскопа не влияет, так как вращению вокруг его оси фигуры ничто не препятствует. Остается единственная составляющая Ω_2 , изменение которой обуславливается вращением Земли. Гироскоп не может вращаться вокруг оси Ω_2 , так как его ось фигуры вынуждена оставаться в горизонтальной плоскости (в плоскости рисунка). Но он может свободно вращаться вокруг своей оси фигуры и вокруг вертикальной оси, т. е. оси, перпендикулярной к плоскости рисунка. Тем самым рассматриваемый случай сведен к случаю, подробно разобранным в п. 6, причем роль вертикали играет направление вектора Ω_2 . Поэтому ось фигуры гироскопа должна поворачиваться в плоскости рисунка в направлении к полуденной линии, стремясь стать одноименно параллельной оси вектора Ω_2 . Однако при таком вращении длина составляющей Ω_2 уменьшается, а составляющей Ω_1 — увеличивается. Когда ось фигуры гироскопа установится параллельно полуденной линии, Ω_2 обратится в нуль. В этом положении поворот оси фигуры гироскопа, обусловленный вращением Земли, прекратится. При этом, в соответствии с правилом Фуко, собственное вращение гироскопа и вращение Земли вокруг полуденной линии будут происходить в одинаковых направлениях.

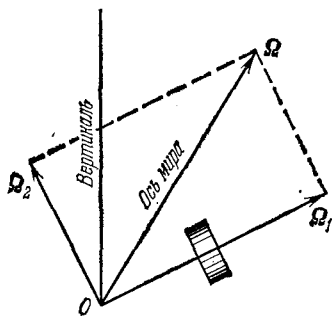


Рис. 162.

Идею гироскопа Фуко можно уяснить и иначе. Вращение Земли стремится вызвать поворот оси фигуры гироскопа вокруг направления вектора Ω_2 . Но такой поворот невозможен, поскольку он выводил бы ось фигуры гироскопа из плоскости рисунка, в которой она вынуждена находиться. Он проявляется лишь в деформациях и в появлении вследствие этого вращающего момента M , параллельного вектору Ω_2 . Этот вращающий момент передается гироскопу и вызывает прецессию вокруг вертикали, в результате которой ось фигуры гироскопа поворачивается к полуденной линии, стремясь стать одноименно параллельной ей.

8. Фуко указал также, что гироскоп с двумя степенями свободы может быть использован в качестве *инклинометра*, т. е. прибора для определения географической широты места. Закрепим неподвижно наружное кольцо карданова подвеса гироскопа так, чтобы его плоскость совпала с плоскостью географического меридиана. У гироскопа останутся две степени свободы. Он может вращаться вокруг оси своей фигуры и (вместе с внутренним кольцом) вокруг горизонтальной оси $B'B$, перпендикулярной к плоскости меридиана. Пусть плоскость рис. 162 совпадает с плоскостью географического меридиана. Ось фигуры гироскопа может вращаться только в плоскости рисунка вокруг горизонтальной оси $B'B$, перпендикулярной к этой плоскости. Из плоскости рисунка она выходить не может. Разложим угловую скорость осевого вращения Земли Ω на составляющую Ω_1 вдоль оси фигуры гироскопа и составляющую Ω_2 , к ней перпендикулярную. Первая составляющая роли не играет. Существенно только вращение вокруг оси вектора Ω_2 . Мы пришли к той же ситуации, что и в предыдущем пункте при разборе гироскопа Фуко. Повторив приведенные там рассуждения, видим, что ось фигуры гироскопа будет поворачиваться по направлению к *оси мира* (т. е. к оси собственного вращения Земли). Этот поворот будет сопровождаться уменьшением длины вектора Ω_2 . Когда ось фигуры гироскопа станет одноименно параллельной оси мира, вектор Ω_2 обратится в нуль, и дальнейший поворот гироскопа, вызванный осевым вращением Земли, прекратится. Таким образом, ось фигуры гироскопа устанавливается одноименно параллельно с осью мира. Угол между этим направлением и горизонтальной плоскостью и есть географическая широта рассматриваемого места.

9. Гирокомпас и гироскоп Фуко не получили практического применения. Они лишь теоретически решают поставленные перед ними задачи. Благодаря медленности вращения Земли силы, действующие на гироскоп из-за такого вращения, ничтожны и не в состоянии преодолеть (или способны преодолеть с трудом) трение в подшипниках этих приборов. Кроме того, такие приборы в принципе могли бы быть использованы только тогда, когда они установлены на неподвижном (относительно Земли) основании. Они не годятся на самолетах и судах, так как при движении последних развиваются угловые скорости вращения, а также ускорения, во много раз превосходящие соответствующие величины при суточном вращении земного шара.

Задача создания гирокомпаса была поставлена на практическую основу только после того, как стали использовать гироскоп не с двумя, а с *тремя степенями свободы*. Гироскоп должен быть *астатическим*. Но астатический гироскоп с тремя степенями свободы не подвержен влиянию вращения Земли. Эту трудность можно преодолеть, если связать гироскоп с каким-либо приспособлением, которое под-

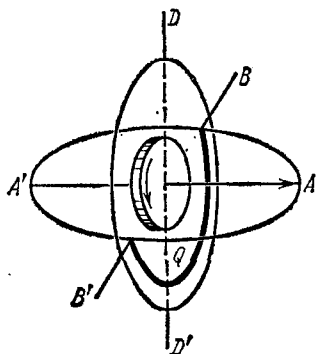


Рис. 163.

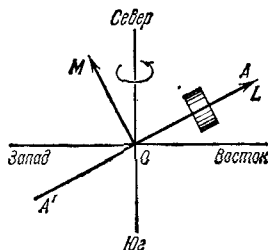


Рис. 164.

вергалось бы воздействию указанного вращения и в свою очередь воздействовало на гироскоп. Поясним эту идею на примере одной из старых моделей гирокомпаса, построенного известным американским строителем гироскопических приборов Сперри в 1911 г. и оказавшегося вполне пригодным навигационным прибором. Приспособлением, о котором говорилось выше, здесь является маятник, жестко связанный с внутренним кольцом карданова подвеса. Маятником служит тяжелая дуга Q , плоскость которой перпендикулярна к плоскости внутреннего кольца, а значит, параллельна плоскости маховичка гироскопа (рис. 163). Принцип действия прибора чрезвычайно прост. Допустим, что ось наружного кольца $D'D'$ установлена вертикально, а плоскость внутреннего кольца вместе с осью гироскопа $A'A$ — горизонтально. В этом положении на гироскоп не действуют никакие моменты сил. Ось фигуры гироскопа $A'A$, если ее направить на какую-либо звезду, начнет двигаться вместе с ней. Допустим, что ось фигуры гироскопа отклонена от полуденной линии, например, к востоку (рис. 164). Звезда, на которую направлена эта ось, будет подниматься. Вместе с ней начнет подниматься и положительный конец оси фигуры гироскопа A . Но тогда начнет поворачиваться вокруг оси $B'B$ и дуга Q . Момент силы тяжести кольца M относительно точки O будет стремиться опустить точку A и вызовет прецессию гироскопа вокруг вертикальной оси $D'D'$, в результате которой ось фигуры гироскопа будет поворачиваться к полуденной линии, стремясь установиться одноименно параллельно с ней. То же самое произойдет, если первоначально положительный конец оси фигуры A был отклонен от полуденной линии к западу.

10. В заключение рассмотрим идею однорельсовой железной дороги. Вагон, катящийся по одному рельсу, неустойчив. Для стабилизации его движения можно применить массивный гироскоп с тремя степенями свободы, установленный внутри

вагона, как указано на рис. 165, а. Роль наружного кольца карданова подвеса выполняют стенки вагона. Допустим, что вагон накренился вправо. Сила тяжести еще больше будет стремиться опрокинуть вагон в ту же сторону. Она создает вращающий момент, направленный за плоскость рисунка параллельно продольной оси вагона. Через подшипники этот момент передается гироскопу. Гироскоп начнет прецессировать, что вызовет наклон внутренней рамы (рис. 165, б). Если

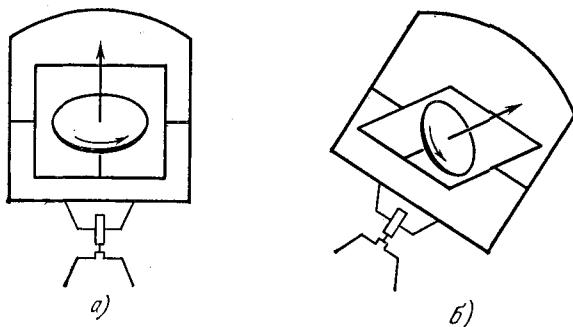


Рис. 165.

каким-либо способом ускорить эту прецессию, то возрастет вращающий момент сил противодействия со стороны гироскопа (см. § 50, пп. 9 и 10). Центр тяжести вагона начнет подниматься, и вагон вернется в вертикальное положение. Такое вынужденное ускорение прецессионного движения рамы должно выполняться автоматически. В устройстве соответствующего автомата и заключается вся трудность практического осуществления идеи однорельсовой дороги.

§ 52. Основы точной теории симметричного гироскопа

1. Точная теория симметричного гироскопа учитывает различие направлений мгновенной оси вращения, оси фигуры и момента импульса гироскопа относительно его точки опоры. Она справедлива при любых соотношениях между угловыми скоростями ω_{\parallel} и ω_{\perp} , с которыми гироскоп вращается вокруг оси своей

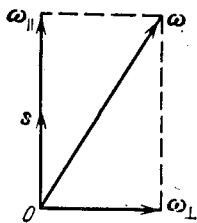


Рис. 166.

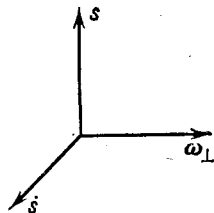


Рис. 167.

фигуры и перпендикулярной к ней оси. Однако наиболее важные гироскопические эффекты, которым гироскоп обязан своими научными и техническими применениями, проявляются лишь при соблюдении условия $\omega_{\parallel} \gg \omega_{\perp}$.

Отложим от точки опоры O в положительном направлении оси фигуры гироскопа единичный вектор s (рис. 166). Конечная точка этого вектора называется *вершиной гироскопа*.

Производная \dot{s} имеет смысл линейной скорости движения вершины гироскопа, а потому может быть представлена в виде $\dot{s} = [\omega s] = [\omega_{\perp} s]$. Три вектора \dot{s} , ω_{\perp} и s взаимно перпендикулярны и образуют правовинтовую систему, как указано на рис. 167. Из этого рисунка видно, что $\omega_{\perp} = [s\dot{s}]$. Поэтому

$$L = I_{\parallel} \omega_{\parallel} + I_{\perp} \omega_{\perp} = I_{\parallel} \omega_{\parallel} s + I_{\perp} [s\dot{s}]. \quad (52.1)$$