

вагона, как указано на рис. 165, а. Роль наружного кольца карданова подвеса выполняют стенки вагона. Допустим, что вагон накренился вправо. Сила тяжести еще больше будет стремиться опрокинуть вагон в ту же сторону. Она создает вращающий момент, направленный за плоскость рисунка параллельно продольной оси вагона. Через подшипники этот момент передается гироскопу. Гироскоп начнет прецессировать, что вызовет наклон внутренней рамы (рис. 165, б). Если

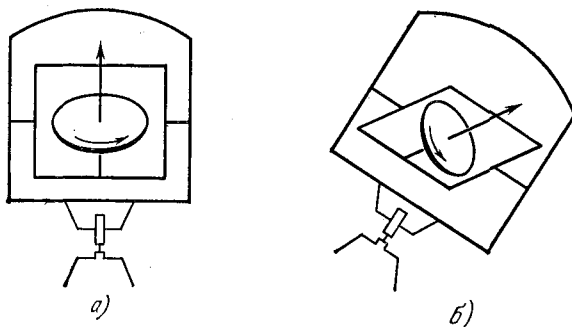


Рис. 165.

каким-либо способом ускорить эту прецессию, то возрастет вращающий момент сил противодействия со стороны гироскопа (см. § 50, пп. 9 и 10). Центр тяжести вагона начнет подниматься, и вагон вернется в вертикальное положение. Такое вынужденное ускорение прецессионного движения рамы должно выполняться автоматически. В устройстве соответствующего автомата и заключается вся трудность практического осуществления идеи однорельсовой дороги.

§ 52. Основы точной теории симметричного гироскопа

1. Точная теория симметричного гироскопа учитывает различие направлений мгновенной оси вращения, оси фигуры и момента импульса гироскопа относительно его точки опоры. Она справедлива при любых соотношениях между угловыми скоростями ω_{\parallel} и ω_{\perp} , с которыми гироскоп вращается вокруг своей

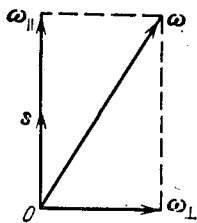


Рис. 166.

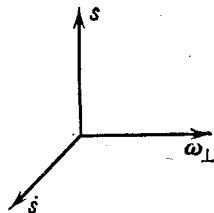


Рис. 167.

фигуры и перпендикулярной к ней оси. Однако наиболее важные гироскопические эффекты, которым гироскоп обязан своими научными и техническими применениями, проявляются лишь при соблюдении условия $\omega_{\parallel} \gg \omega_{\perp}$.

Отложим от точки опоры O в положительном направлении оси фигуры гироскопа единичный вектор s (рис. 166). Конечная точка этого вектора называется *вершиной гироскопа*.

Производная \dot{s} имеет смысл линейной скорости движения вершины гироскопа, а потому может быть представлена в виде $\dot{s} = [\omega s] = [\omega_{\perp} s]$. Три вектора s , ω_{\perp} и \dot{s} взаимно перпендикулярны и образуют правовинтовую систему, как указано на рис. 167. Из этого рисунка видно, что $\omega_{\perp} = [s\dot{s}]$. Поэтому

$$L = I_{\parallel} \omega_{\parallel} + I_{\perp} \omega_{\perp} = I_{\parallel} \omega_{\parallel} s + I_{\perp} [s\dot{s}]. \quad (52.1)$$

Подставив это выражение в уравнение (49.3), получим

$$I_{\parallel} \dot{\omega}_{\parallel} s + I_{\parallel} \omega_{\parallel} \dot{s} + I_{\perp} [s\ddot{s}] = M. \quad (52.2)$$

Это — основное уравнение точной теории симметричного гироскопа. Его удобно разделить на два уравнения. Первое уравнение получается из (52.2) скалярным умножением на s . С учетом соотношения $(s\dot{s}) = 0$ такое умножение дает

$$I_{\parallel} \dot{\omega}_{\parallel} = M_{\parallel}, \quad (52.3)$$

где $M_{\parallel} \equiv (Ms)$ — проекция вектора M на ось фигуры гироскопа. Второе уравнение найдем также из (52.2), но векторным умножением на s . Учитывая при этом тождество $[s[s\ddot{s}]] = -s^2\ddot{s} + (s\ddot{s})s = -\dot{s}^2 + (s\ddot{s})s$, получим

$$I_{\parallel} \omega_{\parallel} [s\dot{s}] - I_{\perp} \ddot{s} + I_{\perp} (s\ddot{s})s = [sM].$$

Дифференцируя соотношение $(s\dot{s}) = 0$, найдем $(s\ddot{s}) + \dot{s}^2 = 0$. С учетом этого преобразуем последнее уравнение к виду

$$I_{\perp} \ddot{s} = [Ms] + I_{\parallel} \omega_{\parallel} [s\dot{s}] - I_{\perp} \dot{s}^2 s. \quad (52.4)$$

2. Уравнение (52.3) определяет изменение во времени угловой скорости вращения гироскопа ω_{\parallel} вокруг оси фигуры. Оно совпадает с соответствующим уравнением вращения твердого тела вокруг закрепленной оси.

Уравнение (52.4) определяет ускорение \ddot{s} , с которым движется вершина гироскопа. Запишем его в виде

$$I_{\perp} \ddot{s} = f, \quad (52.5)$$

где введено обозначение

$$f = [Ms] + I_{\parallel} \omega_{\parallel} [s\dot{s}] - I_{\perp} \dot{s}^2 s. \quad (52.6)$$

В этом виде уравнение (52.5) формально совпадает с уравнением Ньютона. Роль массы играет величина I_{\perp} , роль силы — вектор f . Вершина гироскопа движется по поверхности неподвижной сферы единичного радиуса $s^2 = 1$. Ее ускорение складывается из ускорения $(\ddot{s})_{\perp}$, направленного по касательной к этой сфере, и радиального, или центростремительного, ускорения $(\ddot{s})_{\parallel} = -\frac{\dot{s}^2}{s} s = -\dot{s}^2 s$, т. е. $\ddot{s} = (\ddot{s})_{\perp} - \dot{s}^2 s$. Подставив это выражение в уравнение (52.5), видим, что центростремительное ускорение из него выпадает. Уравнение принимает вид

$$I_{\perp} (\ddot{s})_{\perp} = [Ms] + I_{\parallel} \omega_{\parallel} [s\dot{s}]. \quad (52.7)$$

Следовательно, уравнение (52.5) или эквивалентное ему уравнение (52.7) определяют не полное ускорение вершины гироскопа \ddot{s} , а только его составляющую $(\ddot{s})_{\perp}$, касательную к поверхности единичной сферы $s^2 = 1$. Этого достаточно для нахождения движения вершины по начальным условиям (например, по начальному положению и начальной скорости вершины гироскопа). Действительно, движение вершины гироскопа аналогично движению не свободной, а связанной материальной точки, вынужденной находиться на заданной поверхности.

Воображаемую материальную точку, масса которой равна I_{\perp} , помещенную в вершине гироскопа, мы иногда будем называть *изображающей точкой*. На правую часть в уравнении (52.7) можно смотреть как на некоторую «силу», сообщающую ускорение изображающей точке. Первое слагаемое в этой «силе» связано

с действием реальных сил, возникающих при взаимодействиях гироскопа с окружающими телами. Его мы будем называть *реальной силой*

$$f_{\text{реал}} = [Ms]. \quad (52.8)$$

Второе слагаемое $I_{\parallel} \omega_{\parallel} [\dot{s}s]$ к взаимодействию тел не имеет отношения. Это есть фиктивная «сила», возникающая при вращении гироскопа вокруг оси фигуры. Она называется *отклоняющей силой*:

$$f_{\text{откл}} = I_{\parallel} \omega_{\parallel} [\dot{s}s]. \quad (52.9)$$

Отклоняющая сила отлична от нуля только тогда, когда изображающая точка движется. Она перпендикулярна как к оси фигуры гироскопа, так и к скорости движения изображающей точки. Эта сила стремится отклонить вершину гироскопа вбок от направления ее движения. Действием отклоняющей силы объясняются все характерные гироскопические эффекты.

Таким образом, основное уравнение движения симметричного гироскопа может быть записано в виде

$$I_{\perp} (\ddot{s})_{\perp} = f_{\text{реал}} + f_{\text{откл}}. \quad (52.10)$$

3. Приближенная теория гироскопа рассматривает такие движения его, при которых ускорением $(\ddot{s})_{\perp}$ в уравнении (52.10) можно пренебречь. Действительно, в этом случае $f_{\text{реал}} + f_{\text{откл}} = 0$ или

$$I_{\parallel} \omega_{\parallel} [\dot{s}s] + [Ms] = 0.$$

Так как оба вектора s и M не имеют составляющих вдоль оси фигуры, то отсюда получаем

$$I_{\parallel} \omega_{\parallel} \dot{s} = M,$$

а это и есть основное уравнение приближенной теории гироскопа.

4. К движению изображающей точки, поскольку оно описывается уравнением (52.10), формально можно применять все теоремы механики точки, например уравнение сохранения энергии. При этом надо только иметь в виду, что отклоняющая сила как перпендикулярная к скорости \dot{s} работы не производит. Работа производится только реальной силой $f_{\text{реал}}$.

5. На основе точного уравнения движения симметричного гироскопа можно, конечно, исследовать движение свободного гироскопа. Поскольку, однако, относящиеся сюда результаты уже были получены в § 49, мы не будем заниматься этим исследованием, а рассмотрим на основе точной теории вынужденную прецессию и нутации симметричного гироскопа.

Допустим, что действующая сила F постоянна и приложена в одной из точек оси фигуры гироскопа (рис. 168). Радиус-вектор этой точки, проведенный из точки опоры, обозначим a . Если точка опоры O не совпадает с центром масс гироскопа, то роль силы F может выполнять вес самого гироскопа. Момент силы F равен $M = [aF] = [aF_{\perp}]$, где F_{\perp} — слагающая этой силы, перпендикулярная к оси фигуры гироскопа. Следовательно, $f_{\text{реал}} = [Ms] = [[aF_{\perp}] s] = aF_{\perp}$, так как векторы a и s коллинеарны. Таким образом, уравнение (52.10) примет вид

$$I_{\perp} (\ddot{s})_{\perp} = aF_{\perp} + I_{\parallel} \omega_{\parallel} [\dot{s}s]. \quad (52.11)$$

Теперь поставим вопрос, можно ли вершине гироскопа сообщить такую начальную скорость, чтобы она совершала регулярную прецессию, т. е. равномерно вращалась вокруг оси, параллельной направлению действующей силы F и проходящей через точку опоры гироскопа O . Угловую скорость такого вращения обозначим Ω . Конкретно под силой F будем понимать вес самого гироскопа:

$F = mg$. За положительное направление вектора Ω примем направление вверх, т. е. направление, противоположное силе F (см. рис. 168). Ответ на поставленный вопрос легко получить из уравнения (52.11). Для этого спроектируем уравнение (52.11) на направление вектора F_{\perp} . Вершина гироскопа при регулярной прецессии движется со скоростью $\dot{s} = [\Omega s]$ и ускорением $\ddot{s} = -\Omega^2 r$, где r — радиус-вектор, проведенный от оси прецессионного вращения к вершине гироскопа ($r = s \sin \alpha = \sin \alpha$, причем α означает угол между осью фигуры гироскопа и вертикальным направлением). Взяв от ускорения \ddot{s} его составляющую, перпендикулярную к оси фигуры, и выполнив указанное проектирование, получим после сокращения на $\sin \alpha$:

$$I_{\perp} \Omega^2 \cos \alpha - I_{\parallel} \omega_{\parallel} \Omega + aF = 0, \quad (52.12)$$

откуда

$$\Omega = \frac{I_{\parallel} \omega_{\parallel} \pm \sqrt{I_{\parallel}^2 \omega_{\parallel}^2 - 4aFI_{\perp} \cos \alpha}}{2I_{\perp} \cos \alpha}. \quad (52.13)$$

Если центр масс гироскопа лежит выше точки опоры, то угол α — острый (см. рис. 168). В этом случае при недостаточно быстром собственном вращении гироскопа подкоренное выражение в формуле (52.13) может оказаться отрицательным. Тогда рассматриваемая регулярная прецессия становится невозможной, а положение гироскопа — неустойчивым. Вообще, для устойчивости гироскопа необходимо выполнение условия

$$I_{\parallel}^2 \omega_{\parallel}^2 - 4aFI_{\perp} \cos \alpha > 0. \quad (52.14)$$

Это условие выполняется всегда, когда центр масс гироскопа лежит ниже точки опоры. Если же центр масс расположен выше точки опоры, то гироскоп должен вращаться достаточно быстро.

Допустим, что условие (52.14) выполнено. Тогда квадратное уравнение (52.12) имеет два вещественных корня. В этом случае регулярная прецессия возможна и притом не одна, а две. Прецессия, которой соответствует меньший по абсолютной величине корень уравнения (52.12), называется *медленной*. Прецессия, соответствующая другому корню, называется *быстрой*.

6. Допустим, что выполнено условие $I_{\parallel}^2 \omega_{\parallel}^2 \gg |4aFI_{\perp} \cos \alpha|$. Тогда для квадратного корня в формуле (52.13) можно написать приближенно

$$I_{\parallel} \omega_{\parallel} \left(1 - \frac{4aFI_{\perp} \cos \alpha}{I_{\parallel}^2 \omega_{\parallel}^2} \right)^{1/2} \approx I_{\parallel} \omega_{\parallel} - \frac{2aFI_{\perp} \cos \alpha}{I_{\parallel} \omega_{\parallel}}.$$

В результате получится

$$\Omega_{\text{медл}} \approx \frac{aF}{I_{\parallel} \omega_{\parallel}}, \quad (52.15)$$

$$\Omega_{\text{быстр}} \approx \frac{I_{\parallel}}{I_{\perp} \cos \alpha} \omega_{\parallel}. \quad (52.16)$$

Формула (52.15) совпадает с формулой (50.4), к которой приводит приближенная теория гироскопа. Таким образом, регулярная прецессия, о которой говорится

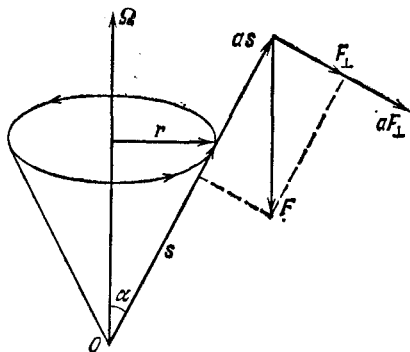


Рис. 168.

в приближенной теории, есть *медленная прецессия*. Угловая скорость быстрой прецессии, как видно из формулы (52.16), по порядку величины совпадает с ω_{\perp} . Здесь не выполнено основное условие применимости приближенной теории $\omega_{\perp} \ll \omega_{\parallel}$. Поэтому быструю прецессию нельзя рассматривать в рамках приближенной теории. Регулярная прецессия свободного гироскопа, рассмотренная в § 49, есть частный случай быстрой прецессии, при котором $F = 0$.

7. Для того чтобы у читателя не сложилось впечатления, что быстрая прецессия является каким-то чисто умозрительным явлением, рассмотрим тривиальный пример конического маятника, когда $\omega_{\parallel} = 0$ и ни о каких гироскопических эффектах говорить не приходится. Разумеется, в этом случае центр масс должен лежать ниже точки подвеса. Поэтому угол α целесообразно заменить дополнительным углом $\beta = \pi - \alpha$, который ось маятника образует с вертикалью, направленной вниз. Формула (52.13) переходит в

$$\Omega = \pm \sqrt{\frac{aF}{I \cos \beta}},$$

т. е. в известную формулу для круговой частоты конического маятника.

8. Регулярная прецессия, как медленная, так и быстрая, является весьма специальным частным случаем движения вершины гироскопа, реализующимся при вполне определенных начальных условиях. Для исследования общего случая в уравнении (52.7) сделаем замену $\dot{s} = v_{\perp} + v_{\parallel}$. Вектор v_{\perp} определим из условия $[Ms] + I_{\parallel} \omega_{\parallel} [sv_{\perp}] = 0$. Тогда $I_{\perp} (\ddot{s})_{\perp} = I_{\parallel} \omega_{\parallel} [sv_{\perp}]$. Величина v_{\perp} есть скорость вершины гироскопа, с которой она двигалась бы, если бы совершала медленную регулярную прецессию. (Вторая слагающая скорости v_{\parallel} будет описывать нутацию.) Если пренебречь ускорением при такой прецессии, то $\ddot{s} = \dot{v}_{\parallel}$, а потому

$$I_{\perp} \dot{v}_{\parallel} = I_{\parallel} \omega_{\parallel} [sv_{\parallel}], \quad (52.17)$$

причем мы опустили у \dot{v}_{\parallel} значок \perp , так как слагающая ускорения вдоль оси фигуры гироскопа сейчас не представляет интереса, и от нее можно отвлечься. Если на правую часть уравнения (52.17) смотреть как на аналог силы, то эта сила будет перпендикулярна к скорости v_{\parallel} , а потому она не может производить работы. Поэтому величина скорости v_{\parallel} меняться не может, и уравнение (52.17) описывает равномерное движение по окружности. Если r — радиус такой окружности, а Ω_{\parallel} — угловая скорость вращения, то $v_{\parallel} = \Omega_{\parallel} r$, $|v_{\perp}| = \Omega_{\parallel}^2 r$. При этом ввиду перпендикулярности между s и v_{\parallel} из уравнения (52.17) получается

$$I_{\perp} \Omega_{\parallel}^2 r = I_{\parallel} \omega_{\parallel} \Omega_{\parallel} r,$$

откуда

$$\Omega_{\parallel} = \frac{I_{\perp}}{I_{\parallel}} \omega_{\parallel}. \quad (52.18)$$

Таким образом, в общем случае на медленное прецессионное движение вершины гироскопа накладывается равномерное круговое движение с круговой частотой Ω_{\parallel} , определяемой уравнением (52.18). Радиус кругового движения равен $r = \frac{v_{\perp}}{\Omega_{\parallel}} = \frac{v_{\perp}}{\omega_{\parallel}} \frac{I_{\perp}}{I_{\parallel}}$. В результате такого наложения траектория вершины гироскопа может быть либо циклоидального типа (рис. 169, б), либо петлеобразного (рис. 169, а), либо она будет напоминать синусоиду (рис. 169, в). Какой из этих случаев осуществляется в каждом конкретном случае, зависит от начальных условий, т. е. от положения вершины гироскопа в начальный момент времени и

скорости, которая ей была сообщена в тот же момент. Наложением кругового движения на медленную прецессию и объясняются *нутации*, о которых говорилось в § 50. Радиус кругового движения r есть не что иное как амплитуда нутационных колебаний. При $r = 0$ нутаций не будет, и движение вершины перейдет в регулярную прецессию.

Пример. В авиагоризонте, рассмотренном в примере § 50, $I_{\perp} = \frac{3}{5}I_{\parallel}$. Число нутаций на один прецессионный оборот равно

$$N = \frac{\Omega_{\parallel}}{\Omega_{\perp}} = \frac{I_{\parallel}}{I_{\perp}} \frac{\omega_{\parallel}}{\Omega_{\parallel}} = 4,77 \cdot 10^5.$$

Если начальная скорость вершины гироскопа равна нулю, то $v_{\parallel} + v_{\perp} = 0$, а потому $r = v_{\perp}/\Omega_{\perp}$. Но $v_{\perp} = R\Omega_{\perp}$, где R — радиус прецессии. Таким образом,

$$\frac{r}{R} = \frac{\Omega_{\perp}}{\Omega_{\parallel}} = \frac{1}{N} = \frac{1}{4,77 \cdot 10^5}.$$

Этот пример наглядно показывает, насколько мелким и частым дрожанием являются нутации в быстро вращающихся технических гироскопах.

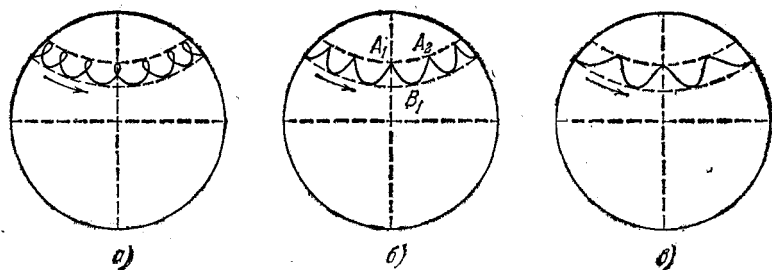


Рис. 169.

9. В заключение рассмотрим, как можно качественно объяснить характер траектории вершины гироскопа при наличии нутаций. Мы исходим непосредственно из уравнения движения вершины (52.11). Пусть на рис. 169 ось фигуры гироскопа своим положительным концом направлена в сторону читателя. Пусть в начальный момент времени вершина неподвижна и занимает положение A_1 (см. рис. 169, б). В этот момент скорость \dot{s} , а потому и отклоняющая сила $I_{\parallel} \omega_{\parallel}$ [ss] равны нулю. Под действием силы тяжести вершина получает скорость, направленную вниз. Но тогда появляется и боковая отклоняющая сила. Она начинает загибать траекторию вершины влево (если, встав на плоскость рисунка, идти в сторону отклонения). В положении B_1 скорость вершины становится горизонтальной, а отклоняющая сила — вертикальной. По величине отклоняющая сила превосходит силу веса, и вершина гироскопа начинает подниматься. В верхнем положении A_2 скорость вершины обращается в нуль. Это непосредственно следует из уравнения энергии, которому формально подчиняется движение вершины. Затем движение неограниченно повторяется. Получается траектория циклоидального типа. Траектория с петлями (рис. 169, а) получится, если в начальный момент сообщить вершине скорость в направлении против прецессии. Если же начальная скорость сообщена в направлении прецессии, то получится траектория типа рис. 169, в. В последнем случае скорость можно подобрать такой, что возникнет регулярная прецессия без нутаций.