§ 53. Тензор и эллипсоид инерции

1. Вычислим момент инерции I твердого тела относительно произвольной оси OA (рис. 170). Без ущерба для общности можно принять, что ось проходит через начало координат O. Координаты будем обозначать либо x, y, z, либо x_1, x_2, x_3. Таким образом, $x_1 \equiv x$, $x_2 \equiv y$, $x_3 \equiv z$. Разложим радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ элемента массы тела dm на составляющие вдоль оси OA и перпендикулярную к ней: $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_\parallel + \boldsymbol{r}_\perp$. По определению момента инерции

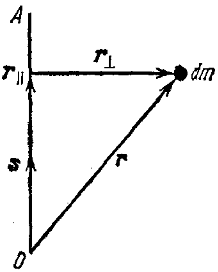

Рис. 170.

$$I = \int r_\perp^2\, dm = \int (r^2 - r_\parallel^2)\, dm.$$

Если s — единичный вектор вдоль оси OA, то $r_\parallel = (\boldsymbol{rs}) = xs_x + ys_y + zs_z$. Кроме того, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Учтя эти соотношения, а также соотношение $s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 = 1$, получим

$$I = I_{xx}s_x^2 + I_{yy}s_y^2 + I_{zz}s_z^2 + 2I_{xy}s_xs_y + 2I_{yz}s_ys_z + 2I_{zx}s_zs_x, \tag{53.1}$$

где I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}, $I_{xy} \equiv I_{yx}$, $I_{yz} \equiv I_{zy}$, $I_{zx} \equiv I_{xz}$ — постоянные, определяемые выражениями

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \int (y^2 + z^2)\, dm, & I_{xy} &\equiv I_{yx} = -\int xy\, dm, \\ I_{yy} &= \int (z^2 + x^2)\, dm, & I_{yz} &\equiv I_{zy} = -\int yz\, dm, \\ I_{zz} &= \int (x^2 + y^2)\, dm, & I_{zx} &\equiv I_{xz} = -\int zx\, dm. \end{aligned} \tag{53.2}$$

Для этих постоянных будем пользоваться также обозначениями I_{11}, I_{22}, ..., I_{13}. Величины I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}, очевидно, имеют смысл моментов инерции тела относительно координатных осей X, Y, Z соответственно. Совокупность девяти величин

$$\begin{matrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{matrix} \tag{53.3}$$

называют *тензором инерции тела относительно точки* O, а сами эти величины — *компонентами этого тензора* *). *Тензор инерции симметричен,* т. е. $I_{ij} = I_{ji}$. Поэтому он полностью определяется заданием *шести* компонентов. Формулу (53.1) можно записать в более краткой и симметричной форме:

$$I = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} I_{ij}s_is_j. \tag{53.4}$$

Если известны для какой-либо координатной системы все шесть компонентов тензора инерции, то по формуле (53.1) или (53.4) можно вычислить момент инерции тела относительно произвольной оси, проходящей через начало координат O. Момент инерции относительно всякой другой оси, не проходящей через начало координат, можно вычислить с помощью теоремы Гюйгенса — Штейнера.

2. Формула (53.4) допускает наглядную геометрическую интерпретацию. Через начало координат O будем проводить прямые во всевозможных направлениях

---

*) Тензором вообще называют упорядоченную совокупность девяти величин, заданную в каждой системе координат, причем при повороте координатных осей эти величины преобразуются как произведения компонентов двух векторов.

и на них откладывать отрезки длиной $r = 1/\sqrt{I}$. Геометрическим местом концов таких отрезков будет некоторая поверхность. Найдем ее уравнение. Согласно построению радиус-вектор точки, лежащей на этой поверхности, определяется выражением $\mathbf{r} = \mathbf{s}/\sqrt{I}$, а координаты той же точки — $x_i = s_i/\sqrt{I}$. Исключая с помощью этих соотношений величины s_i из (53.4), получим уравнение искомой поверхности

$$\Sigma\Sigma\, I_{ij}x_i x_j = 1. \tag{53.5}$$

Эта поверхность второго порядка, очевидно, является эллипсоидом, так как момент инерции I, а с ним и длина радиуса-вектора $\mathbf{r}$ имеют конечные значения, каково бы ни было направление оси s. Она называется *эллипсоидом инерции* тела относительно точки O, являющейся его центром. При перемещении начала координат O относительно тела будет меняться и эллипсоид инерции тела. Если в качестве O взят центр масс тела, то соответствующий эллипсоид называется *центральным*.

3. Как и всякий тензор, тензор инерции зависит от выбора начала координат и направления координатных осей. При изменении координатной системы меняются и значения компонентов тензора инерции тела. Существенно, однако, что какова бы ни была координатная система, всегда могут быть найдены все шесть компонентов тензора инерции, хотя бы по формулам (53.2). В частности, координатные оси можно направить вдоль главных осей эллипсоида инерции. В этой координатной системе в уравнении (53.5) пропадают члены, содержащие произведения координат, и это уравнение примет вид

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 = 1 \tag{53.6}$$

или

$$\Sigma\, I_i x_i^2 = 1. \tag{53.7}$$

Тензор инерции приводится к *диагональному* виду

$$\begin{matrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z, \end{matrix} \tag{53.8}$$

причем *диагональные элементы* тензора мы обозначили с помощью одного индекса. Второй индекс в системе главных осей эллипсоида инерции опущен как излишний.

Таким образом, *для всякого твердого тела, где бы ни было выбрано начало координат O, существуют три взаимно перпендикулярные оси, совпадающие с главными осями эллипсоида инерции тела относительно точки O, для которых недиагональные элементы тензора инерции обращаются в нуль.* Эти оси называются также *главными осями тензора инерции*. Они, очевидно, жестко связаны с телом. Точно так же жестко связан с твердым телом и эллипсоид инерции. Если известно положение эллипсоида инерции, то в тот же момент будет известно и положение всего тела. Поэтому задача о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки сводится к задаче о вращении его эллипсоида инерции вокруг той же точки. Этим воспользовался Пуансо (1777—1859) для наглядной геометрической интерпретации вращения твердого тела вокруг неподвижной точки. Она будет рассмотрена в следующем параграфе. Главные оси центрального эллипсоида инерции называют также *главными осями самого тела*.

Направление главных осей тела часто можно определить, пользуясь соображениями симметрии. Так, например, главные оси однородного прямоугольного параллелепипеда параллельны его ребрам. Если тело обладает симметрией вращения вокруг некоторой оси, то его эллипсоид инерции обладает такой же симметрией. К телам такого рода относится, например, цилиндр. В этом случае моменты инерции тела относительно всех осей, перпендикулярных к оси симметрии, одинаковы. Одной из главных осей тела является его ось симметрии.

Всякая прямая, к ней перпендикулярная, также будет главной осью тела. Таким образом, существует бесконечное множество троек взаимно перпендикулярных главных осей тела, у которых одна ось, а именно ось симметрии, будет общей. Для шара эллипсоиды инерции относительно всех осей, проходящих через центр шара, одинаковы. В этом случае любая ось будет главной осью тела.

Для динамики вращательного движения твердого тела существенна симметрия не самого тела, а симметрия соответствующего ему эллипсоида инерции. Все тела с одинаковыми эллипсоидами инерции *динамически эквивалентны*. Чтобы эллипсоид инерции обладал симметрией вращения, не обязательно, чтобы само тело обладало той же симметрией. Возьмем, например, однородный параллелепипед с квадратным основанием. Поместим начало координат O в любой точке геометрической оси параллелепипеда. Тогда нетрудно показать, что эллипсоид инерции будет эллипсоидом вращения, ось симметрии которого совпадает с геометрической осью параллелепипеда. В динамическом отношении движение такого параллелепипеда описывается такими же уравнениями, что и движение однородного цилиндра. Если параллелепипед вырождается в куб, а начало координат помещено в его центре, то эллипсоид инерции вырождается в сферу. В динамическом отношении однородный куб ведет себя так же, как однородный шар.

4. Допустим теперь, что твердое тело равномерно вращается вокруг закрепленной оси, например, оси, проходящей через неподвижные подшипники. Со стороны подшипников тело подвергается действию сил. Пусть это единственные внешние силы, действующие на тело. Их равнодействующая $\boldsymbol{F}$ найдется по теореме о движении центра масс. Она равна

$$\boldsymbol{F} = -m\omega^2 \boldsymbol{r}_C,$$

где $\boldsymbol{r}_C$ — радиус-вектор центра масс тела, проведенный от оси вращения перпендикулярно к ней. Момент внешних сил относительно начала координат равен

$$\boldsymbol{M} = -\int [\boldsymbol{r}\omega^2 \boldsymbol{r}_\perp]\, dm = \omega^2 \int [\boldsymbol{r}_\perp \boldsymbol{r}_\parallel]\, dm.$$

Примем ось вращения за координатную ось X, тогда $\boldsymbol{r}_\parallel = x\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{r}_\perp = y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$. Учтя соотношения $[\boldsymbol{ij}] = \boldsymbol{k}$, $[\boldsymbol{ik}] = -\boldsymbol{j}$, получим

$$\boldsymbol{M} = \omega^2 \boldsymbol{j} \int zx\, dm - \omega^2 \boldsymbol{k} \int xy\, dm,$$

или

$$\boldsymbol{M} = \omega^2 (I_{xy} \boldsymbol{k} - I_{zx} \boldsymbol{j}).$$

Уберем подшипники и спросим себя, при каких условиях движение тела не изменится, т. е. останется вращением вокруг прежней оси X. Для этого необходимо, чтобы $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{M} = 0$. Следовательно, ось вращения должна проходить через центр масс и, кроме того, должно быть $I_{zx} = I_{xy} = 0$. Последнее условие означает, что ось вращения должна быть одной из главных осей тела. Найденные условия являются и достаточными. Это следует из того, что при их выполнении удаление подшипников не меняет уравнения движения центра масс и уравнения моментов относительно центра масс. Эти же уравнения (при заданных начальных условиях) однозначно определяют движение твердого тела.

5. Итак, *во всяком твердом теле существуют три взаимно перпендикулярные оси, совпадающие с главными осями центрального эллипсоида инерции тела, вокруг которых тело может вращаться без воздействия внешних сил*. Такие оси называются поэтому *свободными* или *перманентными осями вращения*. Последним термином хотят подчеркнуть, что вращение твердого тела по инерции в отсутствие возмущений может продолжаться сколь угодно долго. Иное дело, будет ли это вращение устойчивым по отношению к малым возмущениям, с которыми в реальных условиях всегда надо считаться. Если при наличии таковых характер движения тела меняется мало, т. е. мгновенная ось вращения хотя и непрерывно изменяет свое положение в теле и пространстве, но все время проходит очень близко от соответствующей свободной оси, то вращение вокруг последней будет *устойчивым*. Если же сколь угодно малое возмущение существенно меняет характер движения тела, т. е. далеко уводит мгновенную ось от исходного направления, вокруг которого первоначально вращалось тело, то это вращение называется *неустойчивым*. В следующем параграфе будет показано, что *вращение вокруг оси с наибольшим или наименьшим моментом инерции является устойчивым, а вращение вокруг оси с промежуточным значением момента инерции — неустойчивым*. Для демонстрации можно взять картонную коробку прямоугольной формы, у которой длины всех трех ребер различны. Ось с наибольшим моментом инерции будет, очевидно, параллельна наиболее короткому ребру, с наименьшим моментом инерции — наиболее длинному ребру, с промежуточным — ребру промежуточной длины. Коробку подбрасывают вверх, сообщая ей быстрое вращение вокруг одной из этих осей. Во время полета ось вращения сохраняется, если она является осью с наибольшим или наименьшим моментом инерции. Если же первоначальное вращение было сообщено вокруг оси с промежуточным значением момента инерции, то мгновенная ось вращения во время полета коробки непрерывно качается, далеко уходя от первоначального направления в теле. Движение коробки приобретает сложный и запутанный характер.

6. Допустим теперь, что твердое тело вращается вокруг какой-то закрепленной или мгновенной оси OA с постоянной или непостоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$. Найдем его момент количества движения $\boldsymbol{L}$ относительно начала координат O, а также кинетическую энергию K. По определению

$$\boldsymbol{L}=\int [\boldsymbol{r}\boldsymbol{v}]\, dm.$$

Подставим сюда $\boldsymbol{v}=[\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{r}]$ и воспользуемся формулой $[\boldsymbol{r}\,[\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{r}]]=r^2\boldsymbol{\omega}-(\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{r}$. Тогда получим

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{\omega}\int r^2 dm-\int (\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{r}\, dm.$$

В проекциях на координатные оси это соотношение записывается так:

$$\begin{aligned} L_x&=L_{xx}\omega_x+L_{xy}\omega_y+L_{xz}\omega_z,\\ L_y&=L_{yx}\omega_x+L_{yy}\omega_y+L_{yz}\omega_z,\\ L_z&=L_{zx}\omega_x+L_{zy}\omega_y+L_{zz}\omega_z,\end{aligned} \tag{53.9}$$

или короче —

$$L_i=\sum_{j=1}^{3} I_{ij}\omega_j \qquad (i=1,\ 2,\ 3). \tag{53.10}$$

Таким образом, *компоненты вектора момента количества движения являются линейными однородными функциями компонентов вектора угловой скорости*. В системе главных осей формулы (53.9) упрощаются и принимают вид

$$L_x=I_x\omega_x, \qquad L_y=I_y\omega_y, \qquad L_z=I_z\omega_z. \tag{53.11}$$

Формулы ясно показывают, что в общем случае направления векторов $\boldsymbol{L}$ и $\boldsymbol{\omega}$ не совпадают. Кинетическую энергию вращающегося твердого тела легко найти по формуле (47.2). Она равна

$$K=\frac{1}{2}(\boldsymbol{L}\boldsymbol{\omega})=\frac{1}{2}\sum\sum I_{ij}\omega_i\omega_j. \tag{53.12}$$

§ 54. Вращение твердого тела по инерции вокруг неподвижной точки

1. Пуансо дал простую и наглядную интерпретацию движения твердого тела по инерции вокруг неподвижной точки опоры O. С твердым телом связывается его эллипсоид инерции с центром в точке опоры O. Движение тела заменяется движением этого эллипсоида (см. предыдущий параграф, п. 3). В основе интерпретации Пуансо лежат три теоремы, которые мы и докажем. Для краткости