рактер движения тела, т. е. далеко уводит мгновенную ось от исходного направления, вокруг которого первоначально вращалось тело, то это вращение называется *неустойчивым*. В следующем параграфе будет показано, что *вращение вокруг оси с наибольшим или наименьшим моментом инерции является устойчивым, а вращение вокруг оси с промежуточным значением момента инерции — неустойчивым*. Для демонстрации можно взять картонную коробку прямоугольной формы, у которой длины всех трех ребер различны. Ось с наибольшим моментом инерции будет, очевидно, параллельна наиболее короткому ребру, с наименьшим моментом инерции — наиболее длинному ребру, с промежуточным — ребру промежуточной длины. Коробку подбрасывают вверх, сообщая ей быстрое вращение вокруг одной из этих осей. Во время полета ось вращения сохраняется, если она является осью с наибольшим или наименьшим моментом инерции. Если же первоначальное вращение было сообщено вокруг оси с промежуточным значением момента инерции, то мгновенная ось вращения во время полета коробки непрерывно качается, далеко уходя от первоначального направления в теле. Движение коробки приобретает сложный и запутанный характер.

6. Допустим теперь, что твердое тело вращается вокруг какой-то закрепленной или мгновенной оси OA с постоянной или непостоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$. Найдем его момент количества движения $\boldsymbol{L}$ относительно начала координат O, а также кинетическую энергию K. По определению

$$\boldsymbol{L}=\int [\boldsymbol{rv}]\, dm.$$

Подставим сюда $\boldsymbol{v}=[\boldsymbol{\omega r}]$ и воспользуемся формулой $[\boldsymbol{r}[\boldsymbol{\omega r}]]=r^2\boldsymbol{\omega}-(\boldsymbol{\omega r})\,\boldsymbol{r}$. Тогда получим

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{\omega}\int r^2dm-\int (\boldsymbol{\omega r})\,\boldsymbol{r}\, dm.$$

В проекциях на координатные оси это соотношение записывается так:

$$\begin{aligned} L_x&=L_{xx}\omega_x+L_{xy}\omega_y+L_{xz}\omega_z,\\ L_y&=L_{yx}\omega_x+L_{yy}\omega_y+L_{yz}\omega_z,\\ L_z&=L_{zx}\omega_x+L_{zy}\omega_y+L_{zz}\omega_z, \end{aligned} \tag{53.9}$$

или короче —

$$L_i=\sum_{j=1}^{3} I_{ij}\omega_j \qquad (i=1,\ 2,\ 3). \tag{53.10}$$

Таким образом, *компоненты вектора момента количества движения являются линейными однородными функциями компонентов вектора угловой скорости*. В системе главных осей формулы (53.9) упрощаются и принимают вид

$$L_x=I_x\omega_x, \qquad L_y=I_y\omega_y, \qquad L_z=I_z\omega_z. \tag{53.11}$$

Формулы ясно показывают, что в общем случае направления векторов $\boldsymbol{L}$ и $\boldsymbol{\omega}$ не совпадают. Кинетическую энергию вращающегося твердого тела легко найти по формуле (47.2). Она равна

$$K=\frac{1}{2}(\boldsymbol{L\omega})=\frac{1}{2}\sum\sum I_{ij}\omega_i\omega_j. \tag{53.12}$$

§ 54. Вращение твердого тела по инерции вокруг неподвижной точки

1. Пуансо дал простую и наглядную интерпретацию движения твердого тела по инерции вокруг неподвижной точки опоры O. С твердым телом связывается его эллипсоид инерции с центром в точке опоры O. Движение тела заменяется движением этого эллипсоида (см. предыдущий параграф, п. 3). В основе интерпретации Пуансо лежат три теоремы, которые мы и докажем. Для краткости

будем называть *полюсом* точку пересечения P мгновенной оси с поверхностью эллипсоида инерции.

Теорема 1. *Радиус-вектор, соединяющий точку опоры O с полюсом P, пропорционален мгновенной угловой скорости вращения тела.*

При доказательстве исходим из уравнения энергии $\Sigma\Sigma\, I_{ij}\omega_i\omega_j = 2K = \mathrm{const}$. Возьмем на мгновенной оси точку Q с радиусом-вектором $\boldsymbol{r} = \frac{\boldsymbol{\omega}}{\sqrt{2K}}$. Тогда из уравнения энергии найдем, что координаты точки Q должны удовлетворять уравнению $\Sigma\Sigma\, I_{ij}x_ix_j = 1$. Это значит, что точка Q лежит на поверхности эллипсоида инерции. А так как она лежит и на мгновенной оси, то она совпадает с полюсом P. Итак, радиус-вектор полюса P связан с вектором угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ соотношением $\boldsymbol{\omega} = \sqrt{2K}\boldsymbol{r}$. Отсюда и следует доказываемая теорема.

Теорема 2. *Касательная плоскость к эллипсоиду инерции в точке нахождения полюса P перпендикулярна к вектору $\boldsymbol{L}$ момента импульса тела относительно точки опоры O.*

При доказательстве можно воспользоваться уравнением эллипсоида инерции в любой системе координат. Но проще взять уравнение этой поверхности в системе главных осей эллипсоида, т. е. $I_xx^2 + I_yy^2 + I_zz^2 = 1$. Левую часть этого уравнения обозначим $F(x, y, z)$, т. е. запишем само уравнение в виде $F(x, y, z) = 1$. Как было показано в § 29 (пункт 3), вектор

$$\boldsymbol{N} = \frac{\partial F}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\boldsymbol{k} \equiv \operatorname{grad} F,$$

направлен по нормали к поверхности эллипсоида. Иными словами, вектор $\boldsymbol{N}$ перпендикулярен к касательной плоскости, о которой говорится в теореме. Он равен

$$\boldsymbol{N} = 2\,(I_xx\boldsymbol{i} + I_yy\boldsymbol{j} + I_zz\boldsymbol{k}).$$

На основании предыдущей теоремы его можно представить в виде

$$\boldsymbol{N} = \mu\,(I_x\omega_x\boldsymbol{i} + I_y\omega_y\boldsymbol{j} + I_z\omega_z\boldsymbol{k}),$$

т. е.

$$\boldsymbol{N} = \mu\boldsymbol{L},$$

где μ — некоторый скаляр. Это соотношение и доказывает теорему.

Ввиду отсутствия моментов внешних сил относительно точки опоры O вектор $\boldsymbol{L}$ не меняется во времени. Поэтому не будет менять свое направление и касательная плоскость к эллипсоиду инерции, о которой говорится в теореме.

Теорема 3. *Длина перпендикуляра, опущенного из точки опоры O на плоскость, касательную к эллипсоиду инерции в точке нахождения полюса P, не меняется с течением времени.*

Применим для доказательства уравнение энергии в виде $(\boldsymbol{L}\boldsymbol{\omega}) = 2K = \mathrm{const}$, или $L\omega_L = 2K = \mathrm{const}$, где ω_L — проекция вектора $\boldsymbol{\omega}$ на неизменное направление вектора $\boldsymbol{L}$. Так как величины L и K постоянны, то отсюда следует, что постоянна и проекция ω_L. Но, как было показано при доказательстве теоремы 1, эта проекция связана с длиной перпендикуляра r_L соотношением $\omega_L = \sqrt{2K}r_L$. Следовательно, постоянна и длина r_L, что и требовалось доказать.

Из доказанной теоремы следует, что *касательная плоскость к эллипсоиду инерции в точке нахождения полюса неизменна не только по направлению, но и по своему положению в пространстве.* Поэтому эту плоскость часто называют *неизменяемой плоскостью.*

2. Теперь интерпретация Пуансо напрашивается сама собой. Связав с движущимся телом его эллипсоид инерции с центром в точке опоры O, проведем в какой-либо момент времени касательную плоскость в точке нахождения полюса в этот момент. Это будет неизменяемая плоскость в соответствии с теоремами **2** и **3**. При этом в полюсе P не может быть скольжения между эллипсоидом инерции и неизменяемой плоскостью, так как через эту точку проходит мгновенная ось вращения тела. Если катить без скольжения эллипсоид инерции тела по неизменяемой плоскости с угловой скоростью, пропорциональной радиусу-вектору точки касания (т. е. полюса), то в соответствии с теоремой 1 при таком качении будет воспроизведено (в ускоренном или замедленном темпе) вращение твердого тела, связанного с эллипсоидом инерции.

3. Полюс P одновременно находится и на поверхности эллипсоида инерции, и на неизменяемой плоскости. Допустим для наглядности, что неизменяемая плоскость закрашена, например, покрыта сажей. При качении эллипсоида инерции на его поверхности и на неизменяемой плоскости останутся следы, показывающие, через какие точки проходил полюс. Кривая, которую описывает полюс на поверхности эллипсоида инерции, называется *полодией*. Плоская же кривая, описываемая тем же полюсом на неизменяемой плоскости, называется *герполодией*. Если эллипсоид инерции касается неизменяемой плоскости некоторой точкой, то спустя некоторое время он будет касаться той же плоскости той же точкой, но, вообще говоря, уже в другом месте. Иными словами, полюс на поверхности эллипсоида инерции вернется в свое исходное положение. Это показывает, что *полодия является замкнутой кривой*. Что касается герполодии, то она, вообще говоря, *не замкнута*.

Соединив прямыми точки полодии и точки герполодии с точкой опоры O, получим две конические поверхности. Одна коническая поверхность жестко связана с вращающимся телом. Она называется *конусом полодии*. Другая неподвижна в пространстве и называется *конусом герполодии*. Обе поверхности касаются друг друга вдоль прямой, совпадающей с мгновенной осью вращения. Поэтому между ними нет скольжения. *Движение тела можно рассматривать как качение без скольжения конуса полодии по неподвижному конусу герполодии с угловой скоростью, пропорциональной радиусу-вектору, проведенному из точки опоры к полюсу*. Эта интерпретация, также предложенная Пуансо, только словесно отличается от предыдущей интерпретации.

4. Допустим, что свободное твердое тело вращается вокруг одной из главных осей центрального эллипсоида инерции. Тогда в интерпретации Пуансо эллипсоид инерции будет опираться на неизменяемую плоскость одной из своих вершин, причем соответствующая главная ось будет перпендикулярна к этой плоскости. Полодия и герполодия выродятся в точки, совпадающие с полюсом P. Отсюда видно, что вращение вокруг главной оси центрального эллипсоида инерции может продолжаться вечно. Это совпадает с доказанным выше утверждением, что главные оси центрального эллипсоида инерции являются также свободными осями вращения.

5. С помощью второй интерпретации Пуансо легко также исследовать вопрос, вращение вокруг каких свободных осей является устойчивым, а вокруг каких — неустойчивым. Вопрос этот сводится к отысканию уравнения конуса полодии относительно координатной системы, связанной с телом. Выберем в качестве таковой систему главных осей. Пусть ось X является осью наибольшего, а ось Z — наименьшего моментов инерции. Таким образом, мы полагаем

$$I_x > I_y > I_z. \tag{54.1}$$

В каждый момент времени движение тела есть вращение вокруг мгновенной оси. При вращении сохраняется кинетическая энергия тела:

$$I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2 = 2K = \text{const}. \tag{54.2}$$

Кроме того, сохраняется момент количества движения

$$\boldsymbol{L} = I_x\omega_x\boldsymbol{i} + I_y\omega_y\boldsymbol{j} + I_z\omega_z\boldsymbol{k}.$$

Возведя это соотношение в квадрат, получим

$$I_x^2\omega_x^2 + I_y^2\omega_y^2 + I_z^2\omega_z^2 = L^2 = \text{const}. \tag{54.3}$$

Умножив уравнение (54.2) на $h^2 \equiv L^2/(2K)$ и вычтя его из уравнения (54.3), получим однородное уравнение

$$I_x(I_x - h^2)\,\omega_x^2 + I_y(I_y - h^2)\,\omega_y^2 + I_z(I_z - h^2)\,\omega_z^2 = 0, \tag{54.4}$$

которому должны удовлетворять компоненты вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$. Уравнение мгновенной оси можно записать в виде $\boldsymbol{r} = \rho\boldsymbol{\omega}$, где ρ — переменный параметр, который может принимать любые значения. Найдя отсюда ω_x, ω_y, ω_z и подставив полученные значения в предыдущее уравнение, видим, что координаты точек мгновенной оси должны удовлетворять однородному уравнению второго порядка

$$I_x(I_x - h^2)\,x^2 + I_y(I_y - h^2)\,y^2 + I_z(I_z - h^2)\,z^2 = 0. \tag{54.5}$$

Это значит, что мгновенная ось вращения лежит на поверхности (54.5), т. е. на поверхности конуса второго порядка. Этот конус и будет конусом полодии, так как по самому определению конус полодии есть линейчатая поверхность, образованная последовательными положениями в теле мгновенной оси вращения.

6. Вид конуса полодии (54.5) зависит от значения параметра $h^2 \equiv L^2/(2K)$. Очевидно, все коэффициенты уравнения (54.5) не могут иметь одинаковые знаки, так как в этом случае уравнение не может удовлетворяться вещественными значениями x, y, z. Отсюда следует, что $I_x - h^2 > 0$. Действительно, если бы $I_x - h^2$ было меньше нуля, то в силу условия (54.1) величины $I_y - h^2$ и $I_z - h^2$ тем более были бы меньше нуля, т. е. все три коэффициента в уравнении (54.5) были бы отрицательны. А это, как мы показали, невозможно. Заметив это, видим, что могут представляться только два случая:

случай 1: $(I_y - h^2) > 0, \quad (I_z - h^2) < 0;$

случай 2: $(I_y - h^2) < 0, \quad (I_z - h^2) < 0.$

В первом случае уравнение (54.5) имеет вид $Ax^2 + By^2 - Cz^2 = 0$, где A, B, C — положительные постоянные, причем $A > B > C$. Сечение конуса полодии плоскостью $z = a = \text{const}$ есть эллипс $Ax^2 + By^2 = Ca^2$, а потому конус полодии окружает ось наименьшего момента инерции Z. Напротив, сечения его плоскостями $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$ имеют гиперболическую форму.

Во втором случае уравнение конуса полодии имеет вид $Ax^2 - By^2 - Cz^2 = 0$ с положительными постоянными A, B, C. В этом случае в сечении получается эллипс, если оно производится плоскостью $x = \text{const}$. При сечении же плоскостями $y = \text{const}$ и $z = \text{const}$ образуются гиперболы.

Таким образом, в зависимости от значения параметра h *конус полодии окружает либо ось наибольшего, либо ось наименьшего моментов инерции тела. Но он никогда не окружает ось промежуточного момента инерции.*

7. Теперь вопрос об устойчивости вращения относительно свободных осей тела решается тривиально. Если тело вращается по инерции вокруг одной из свободных осей, то при наличии возмущения это вращение будет искажено. После прекращения возмущения мгновенная ось начнет описывать в теле конус полодии. Если вращение происходило вокруг оси с наибольшим или наименьшим моментами инерции, а возмущение было мало, то после прекращения последнего возникнет конус полодии малого раствора, окружающий эту ось. Двигаясь по нему, мгновенная ось все время будет проходить вблизи свободной оси, вокруг которой было возбуждено первоначальное вращение тела. Это значит, что вращение вокруг такой оси является устойчивым. Напротив, если тело первоначально вращалось вокруг оси промежуточного момента инерции, то после воздействия малого возмущения возникнет конус полодии широкого раствора, окружающий либо ось наибольшего, либо ось наименьшего моментов инерции. Двигаясь по такому конусу, мгновенная ось вращения далеко уйдет от своего исходного направления. Следовательно, вращение вокруг свободной оси с промежуточным моментом инерции является неустойчивым.

8. Если моменты инерции относительно каких-либо главных осей, например X и Y, совпадают между собой ($I_x = I_y$), то эллипсоид инерции и конус полодии будут обладать симметрией вращения относительно оси Z. Конус полодии имеет вид $A(x^2+y^2)-Cz^2=0$, где A и C — положительные постоянные. Его сечение плоскостью, перпендикулярной к оси Z, будет круговым. Сечения же плоскостями, параллельными этой оси, будут гиперболическими. Конус полодии, таким образом, окружает ось Z. Вращение вокруг этой оси будет устойчивым, а вращение вокруг перпендикулярной к ней оси — неустойчивым. Действительно, если вращение совершалось, например, вокруг оси X и подверглось возмущению, то после прекращения такового мгновенная ось начнет описывать круговой конус полодии с осью симметрии Z. Если возмущение мало, то это будет конус очень большего раствора. Его образующие будут наклонены к оси симметрии Z под углом, близким к 90°. Двигаясь по такому конусу, мгновенная ось вращения далеко уйдет от своего исходного положения в теле. Однако она все время будет оставаться почти перпендикулярной к оси Z. Всякая прямая, перпендикулярная к оси и проходящая через центр масс тела, может служить перманентной осью вращения.

Когда моменты инерции I_x, I_y и I_z совпадают между собой, то коэффициенты уравнения (54.5) тождественно обращаются в нуль. Это означает, что любая ось, проходящая через центр масс тела, может быть свободной осью вращения.