было равномерно распределено по всему бесконечному пространству. Будем считать, что в конечном состоянии плотность солнечного вещества одинакова по всему его объему. В действительности она, конечно, возрастает к центру Солнца. Однако для оценок наше предположение не является очень грубым. Приняв его, можно воспользоваться формулой (55.9). Масса Солнца $M = 2\cdot 10^{33}$ г, радиус $R = 7\cdot 10^{10}$ см. Используя эти данные, получаем для выделившейся энергии

$$E=\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}=2{,}28\cdot 10^{48}\text{ эрг.}$$

В настоящее время скорость излучения энергии Солнца составляет $3{,}86\cdot 10^{33}$ эрг/с. Если считать (при грубых оценках это допустимо), что эта скорость была постоянна во времени, то для возраста Солнца получится величина

$$t\approx\frac{2{,}28\cdot 10^{48}}{3{,}86\cdot 10^{33}}=5{,}9\cdot 10^{14}\text{ с}\approx 1{,}9\cdot 10^{7}\text{ лет.}$$

Если воспользоваться распределением плотности вещества, соответствующим принятым в настоящее время моделям Солнца, то время $t$ возрастет примерно до $6\cdot 10^7$ лет. Но и эта величина слишком мала. Возраст Земли по геологическим оценкам составляет около 4—$4{,}5\cdot 10^9$ лет. Возраст Солнца не меньше. Это показывает, что гравитационное сжатие является слишком слабым источником, чтобы покрыть потери энергии Солнца на излучение. В действительности источником солнечной энергии, равно как и энергии, излучаемой звездами, являются *ядерные реакции*, идущие в недрах Солнца и звезд. *Конечным итогом этих реакций является превращение водорода в гелий.* Следует, однако, заметить, что гравитационное сжатие становится основным источником энергии на более поздних стадиях эволюции звезд (белые карлики, нейтронные звезды, или пульсары, коллапсары, или «черные дыры»).

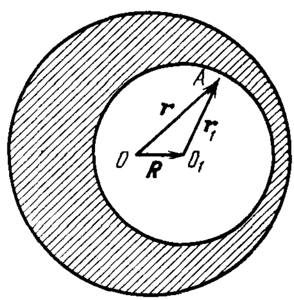

Рис. 175.

7. В сплошном однородном шаре с плотностью вещества $\rho$ сделана сферическая полость, центр которой $O_1$ смещен относительно центра шара $O$ (рис. 175). Найти гравитационное поле в такой полости.

Р е ш е н и е. Вообразим, что полость заполнена веществом, плотность которого равна плотности шара. Тогда искомое гравитационное поле $\boldsymbol{g}$ представится разностью гравитационных полей двух сплошных шаров с центрами в $O$ и $O_1$ соответственно. Точка наблюдения $A$ расположена внутри каждого из этих шаров. Поэтому можно воспользоваться формулой (55.8) и написать

$$\boldsymbol{g}=-\frac{4\pi}{3}G\rho\boldsymbol{r}-\left(-\frac{4\pi}{3}G\rho\boldsymbol{r}_1\right)=-\frac{4\pi}{3}G\rho\boldsymbol{R},$$

где $\boldsymbol{R}$ — радиус-вектор, проведенный из центра шара $O$ к центру полости $O_1$. Поле однородно, т. е. во всех точках полости одинаково по величине и направлению.

## § 56. Ускорение планет и комет при движении по коническим сечениям

1. Замена эллиптических орбит круговыми была произведена в предыдущем параграфе исключительно в целях упрощения вычислений. Рассмотрим теперь задачу более строго, не прибегая к такому упрощению. Наши вычисления будут справедливы не только для *планет*, но и для *комет*. Последние, как показывают наблюдения, движутся по *гиперболам* и *параболам* с фокусом в точке

нахождения Солнца, причем это движение подчиняется второму закону Кеплера. Третий закон Кеплера для гиперболических и параболических движений, конечно, теряет смысл. Однако для вычисления ускорения планеты или кометы он и не нужен. Действительно, при заданной траектории второй закон Кеплера определяет скорость планеты или кометы на этой траектории. Этого достаточно, чтобы полностью описать движение тела, т. е. указать его положение и скорость в любой момент времени. Зная это, можно вычислить ускорение тела в любой точке траектории. Приведем это элементарное вычисление.

**2.** Введем полярную систему координат с полюсом в фокусе $F_1$, где находится Солнце, и полярной осью $PA$, направленной вдоль большой оси эллипса или гиперболы (рис. 176). Ускорение движущегося тела разложим на радиальную составляющую $a_r$, направленную вдоль радиуса $r$, и азимутальную составляющую $a_\varphi$, перпендикулярную к радиусу. Они определяются выражениями

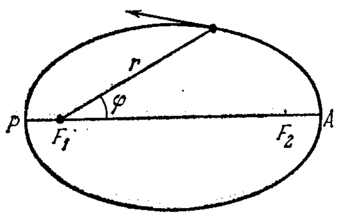


Рис. 176.

$$a_r = \ddot{r} - \dot{\varphi}^2 r, \quad a_\varphi = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) \tag{56.1}$$

(см. § 46). Величина

$$\sigma = \frac{1}{2} r^2\dot{\varphi} \tag{56.2}$$

есть секториальная скорость, т. е. площадь, описываемая радиусом-вектором планеты или кометы в единицу времени. По второму закону Кеплера она постоянна, а потому $a_\varphi = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(2\sigma) = 0$. Значит, ускорение рассматриваемого небесного тела не имеет азимутальной составляющей, т. е. направлено к Солнцу. Этот результат был уже получен в § 31 иным путем.

Чтобы найти радиальное ускорение $a_r$, надо вычислить производные $\ddot{r}$ и $\dot{\varphi}$. Производная $\dot{\varphi}$ определяется формулой (56.2). Для вычисления производной $\ddot{r}$ воспользуемся уравнением конического сечения в полярной системе координат

$$r(1 - e\cos\varphi) = p, \tag{56.3}$$

где $p$ и $e$ — постоянные величины, из которых первая называется *параметром эллипса*, а вторая — его *эксцентриситетом*. Не нарушая общности, обе эти величины можно считать неотрицательными. Для эллипса $e < 1$, для параболы $e = 1$, для гиперболы $e > 1$. В предельных случаях $e = 0$ и $e = \infty$ получаются круг и прямая линия. Дифференцируя уравнение (56.3) по времени, получим

$$\dot{r}(1 - e\cos\varphi) + er\dot{\varphi}\sin\varphi = 0,$$

или после умножения на $r$ с учетом соотношений (56.2) и (56.3)

$$p\dot{r} + 2e\sigma\sin\varphi = 0.$$

Вторичное дифференцирование дает

$$p\ddot{r} + 2\sigma e\cos\varphi\cdot\dot{\varphi} = 0.$$

Подставляя сюда $\dot{\varphi} = \frac{2\sigma}{r^2}$, $e\cos\varphi = 1 - \frac{p}{r}$, получим

$$\ddot{r} = -\frac{4\sigma^2}{pr^2} + \frac{4\sigma^2}{r^3} = -\frac{4\sigma^2}{pr^2} + \dot{\varphi}^2 r.$$

После этого из первой формулы (56.1) находим

$$a_r = -\frac{4\sigma^2}{pr^2}. \tag{56.4}$$

Таким образом, *из первых двух законов Кеплера вытекает, что ускорение планеты или кометы обратно пропорционально квадрату ее расстояния от Солнца.*

3. Третий закон Кеплера позволяет доказать, что коэффициент пропорциональности $4\sigma^2/p$ — один и тот же для всех планет. Докажем это. Площадь эллипса равна $\pi ab$, где $a$ и $b$ — длины большой и малой полуосей его. Так как секториальная скорость $\sigma$ постоянна, то $\sigma = \pi ab/T$, где $T$ — период обращения планеты по ее орбите. Воспользуемся еще формулой аналитической геометрии $p = b^2/a$. Тогда из (56.4) получим

$$a_r = -\frac{4\pi^2 a^3}{T^2}\frac{1}{r^2}. \tag{56.5}$$

(При равномерном вращении по окружности эта формула переходит в известную формулу $a_r = -\frac{4\pi^2 r}{T^2}$.) Вводя постоянную Кеплера (55.1), получим

$$a_r = -\frac{4\pi^2 \mathcal{K}}{r^2}. \tag{56.6}$$

Этот результат совпадает с прежней формулой (55.2), но при его выводе здесь были использованы только эмпирические законы Кеплера без привлечения каких бы то ни было дополнительных соображений. Таким образом, формула (55.2) оказалась точной. Этого и следовало ожидать, так как в соответствии с основными положениями механики Ньютона ускорение планеты должно определяться только взаимным расположением Солнца и планеты и не может зависеть от вида траектории и скорости планеты. По той же причине формула (56.6) может служить и для вычисления ускорений комет, хотя третий закон Кеплера для них и не имеет смысла. В этом случае численное значение постоянной $\mathcal{K}$ будет тем же самым, но она не может быть выражена через параметры орбиты кометы формулами, аналогичными (55.1).

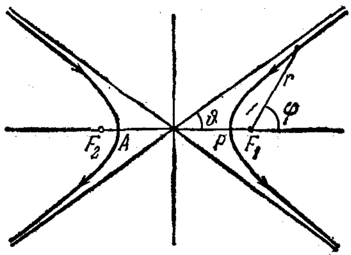


Рис. 177.

4. Движение по параболе можно рассматривать как предельный случай движения по эллипсу, один из фокусов которого удален в бесконечность. Движение по гиперболе нуждается, однако, в некоторых пояснениях.

Гипербола состоит из двух не связанных между собою ветвей. Чтобы обе ветви представлялись единым уравнением (56.3), надо допустить, чтобы расстояние $r$ могло принимать не только положительные, но и *отрицательные* значения. Пусть $\vartheta$ — угол, определяемый условием $\cos\vartheta = 1/e$. Он определяет направления *асимптот гиперболы* (рис. 177). Если $|\varphi| > \vartheta$, то $r$ положительно. Этому соответствует правая ветвь гиперболы. Если же $|\varphi| < \vartheta$, то $r$ отрицательно. Тогда точку кривой надо искать не в направлении полупрямой, проведенной под углом $\varphi$, а в прямо противоположном направлении. Получится левая ветвь гиперболы.

Конечно, движущаяся точка не может перескочить с одной ветви гиперболы на другую. Если на нее действует сила притяжения, то траектория должна быть обращена вогнутостью к силовому центру. Например, если силовой центр (Солнце) находится в фокусе $F_1$, то возможно движение только по правой ветви гиперболы. Однако чтобы подметить общие закономерности движений по коническим сечениям, а не только по эллипсам, имеет смысл чисто формально ввести вспомогательную материальную точку, движущуюся по левой ветви гиперболы под действием силы отталкивания, исходящей из того же силового центра $F_1$. Потенциальная энергия вспомогательной точки представляется выражением $U =$

$=+G\dfrac{Mm}{|r|}$. Она положительна, поскольку силы являются силами отталкивания. Но так как на левой ветви гиперболы величины $r$ отрицательны, то это выражение можно записать в виде $U=-G\dfrac{Mm}{r}$. Эта формула в точности совпадает с формулой, которой выражается потенциальная энергия действительной точки, движущейся по правой ветви гиперболы. Поэтому если энергия и момент количества движения вспомогательной точки относительно фокуса $F_1$ равны соответствующим величинам для действительной точки, то движения обеих точек будут описываться *одними и теми же уравнениями*. В математических же расчетах имеет значение не то, что движется, а то, какими уравнениями движение описывается. Формально математически дело происходит так, как если бы имелась всего одна материальная точка, обладающая способностью перескакивать с одной ветви гиперболы на другую. Целесообразность такого искусственного подхода будет проиллюстрирована на одном примере в § 58. Гравитационных сил отталкивания не существует. Но умозрительно их вводить можно. Кроме того, силы отталкивания возникают при электрических взаимодействиях одноименно заряженных частиц. Они, как и силы тяготения, убывают обратно пропорционально квадрату расстояния. Поэтому движение под действием сил отталкивания представляет не только умозрительный, но и физический интерес.

## § 57. Условия эллиптического, параболического и гиперболического движений

1. *Когда траектория эллиптическая, движение планеты финитно,* т. е. планета движется в ограниченной области пространства, не уходя в бесконечность. Напротив, в *случае гиперболических и параболических траекторий движение инфинитно* — движение планеты не стеснено определенной областью пространства, она может удаляться в бесконечность. Таким образом, задача сводится к нахождению условий финитности и инфинитности движения планеты.

Если $E$ — полная энергия планеты, то

$$\frac{mv^2}{2}-G\frac{Mm}{r}=E=\text{const}. \tag{57.1}$$

Кинетическую энергию Солнца мы не учитываем, считая, что она пренебрежимо мала по сравнению с кинетической энергией планеты. Это справедливо ввиду малости массы планеты по сравнению с массой Солнца. Аналогично, если $L$ — момент импульса планеты относительно Солнца, то

$$mr^2\dot{\varphi}=L=\text{const}. \tag{57.2}$$

Исключим из этих уравнений угловую скорость $\dot{\varphi}$. С этой целью разложим полную скорость $v$ на радиальную составляющую $v_r$ и азимутальную составляющую $r\dot{\varphi}$. Тогда

$$\frac{mv^2}{2}=\frac{m}{2}v_r^2+\frac{m}{2}r^2\dot{\varphi}^2=\frac{m}{2}v_r^2+\frac{L^2}{2mr^2},$$

и уравнение (57.1) примет вид

$$\frac{m}{2}v_r^2-G\frac{Mm}{r}+\frac{L^2}{2mr^2}=E=\text{const}. \tag{57.3}$$