$=+G\frac{Mm}{|r|}$. Она положительна, поскольку силы являются силами отталкивания. Но так как на левой ветви гиперболы величины r отрицательны, то это выражение можно записать в виде $U=-G\frac{Mm}{r}$. Эта формула в точности совпадает с формулой, которой выражается потенциальная энергия действительной точки, движущейся по правой ветви гиперболы. Поэтому если энергия и момент количества движения вспомогательной точки относительно фокуса F_1 равны соответствующим величинам для действительной точки, то движения обеих точек будут описываться *одними и теми же уравнениями*. В математических же расчетах имеет значение не то, что движется, а то, какими уравнениями движение описывается. Формально математически дело происходит так, как если бы имелась всего одна материальная точка, обладающая способностью перескакивать с одной ветви гиперболы на другую. Целесообразность такого искусственного подхода будет проиллюстрирована на одном примере в § 58. Гравитационных сил отталкивания не существует. Но умозрительно их вводить можно. Кроме того, силы отталкивания возникают при электрических взаимодействиях одноименно заряженных частиц. Они, как и силы тяготения, убывают обратно пропорционально квадрату расстояния. Поэтому движение под действием сил отталкивания представляет не только умозрительный, но и физический интерес.

§ 57. Условия эллиптического, параболического и гиперболического движений

1. *Когда траектория эллиптическая, движение планеты финитно*, т. е. планета движется в ограниченной области пространства, не уходя в бесконечность. Напротив, в *случае гиперболических и параболических траекторий движение инфинитно* — движение планеты не стеснено определенной областью пространства, она может удаляться в бесконечность. Таким образом, задача сводится к нахождению условий финитности и инфинитности движения планеты.

Если E — полная энергия планеты, то

$$\frac{mv^2}{2}-G\frac{Mm}{r}=E=\text{const}. \tag{57.1}$$

Кинетическую энергию Солнца мы не учитываем, считая, что она пренебрежимо мала по сравнению с кинетической энергией планеты. Это справедливо ввиду малости массы планеты по сравнению с массой Солнца. Аналогично, если L — момент импульса планеты относительно Солнца, то

$$mr^2\dot{\varphi}=L=\text{const}. \tag{57.2}$$

Исключим из этих уравнений угловую скорость $\dot{\varphi}$. С этой целью разложим полную скорость v на радиальную составляющую v_r и азимутальную составляющую $r\dot{\varphi}$. Тогда

$$\frac{mv^2}{2}=\frac{m}{2}v_r^2+\frac{m}{2}r^2\dot{\varphi}^2=\frac{m}{2}v_r^2+\frac{L^2}{2mr^2},$$

и уравнение (57.1) примет вид

$$\frac{m}{2}v_r^2-G\frac{Mm}{r}+\frac{L^2}{2mr^2}=E=\text{const}. \tag{57.3}$$

Это уравнение содержит только одну неизвестную — радиальную скорость v_r. Формально оно может рассматриваться как *уравнение энергии для одномерного — радиального — движения точки.* Роль потенциальной энергии играет функция

$$V(r) = -G\frac{Mm}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}.$$

2. Задача свелась к нахождению условий финитности и инфинитности одномерного движения с потенциальной энергией $V(r)$. Этот вопрос был исследован в § 25. Наиболее удобен для решения задачи графический метод. На рис. 178 пунктирные кривые представляют соответственно графики функций

$$V_1(r) = -G\frac{Mm}{r}$$

и

$$V_2(r) = \frac{L^2}{2mr^2},$$

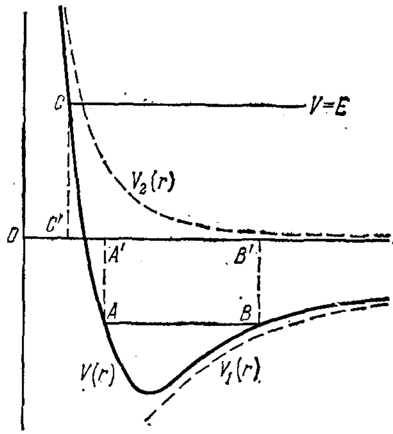

Рис. 178.

причем предполагается, что $L \neq 0$. Интересующая нас кривая $V(r)$ найдется сложением ординат этих двух графиков. При $r \to 0$ функция $V_2(r)$ быстрее стремится к бесконечности, чем функция $V_1(r)$. Поэтому при малых r функция $V(r) = V_1(r) + V_2(r)$ положительна и асимптотически стремится к $+\infty$, когда $r \to 0$. Наоборот, при $r \to \infty$ функция $V_1(r)$ медленнее приближается к нулю, чем $V_2(r)$. Поэтому при больших r функция $V(r)$ отрицательна и асимптотически приближается к нулю, когда $r \to \infty$. График этой функции представлен на рис. 178 сплошной линией. Кривая $V(r)$ имеет вид «потенциальной ямы». Если $L = 0$, то $V(r) \equiv V_1(r)$, минимум на кривой смещается в начало координат и уходит в $-\infty$. Это соответствует случаю, когда планета движется вдоль прямой, проходящей через центр Солнца.

Так как величина $^1/_2\, mv_r^2$ не может быть отрицательной, то из уравнения (57.3) следует, что область, в которой может находиться планета, определяется условием $V(r) \leqslant E$. Проведем горизонтальную прямую $V = E = \text{const}$. Участки кривой $V(r)$, лежащие выше этой прямой, соответствуют точкам пространства, которые не могут быть достигнуты планетой с энергией E. Если $E < 0$, то указанная прямая пересечет кривую $V = V(r)$ в двух точках A и B. Пусть A' и B' — их проекции на горизонтальную ось. Планета может совершать движение только в области между A' и B', она будет «локализована в потенциальной яме» $V = V(r)$. В этом случае движение планеты финитно, и траектория будет *эллиптической*. Если $E > 0$, то прямая пересечет кривую $V(r)$ только в одной точке C, проекцией которой на горизонтальную ось является точка C'. Если планета двигалась справа налево, то в точке C' она переменит направление движения на противоположное и начнет двигаться вправо, монотонно удаляясь в бесконечность. Ее движение инфинитно, а траектория — *гиперболическая*. Наконец, при $E = 0$ движение также инфинитно. Этому промежуточному случаю между эллиптическим и гиперболическим движениями соответствует *движение по параболе*.

Таким образом, *при $E > 0$ движение гиперболическое, при $E < 0$ — эллиптическое, при $E = 0$ — параболическое. В случае сил отталкивания энергия E всегда положительна, а потому движение в этом случае всегда гиперболическое (в частности, прямолинейное)*. Так как при $r \to \infty$ функция $V(r)$ обращается в нуль, то

$$E = \frac{m}{2} v_\infty^2. \tag{57.4}$$

Отсюда следует, что *при гиперболическом движении материальная точка приходит в бесконечность с конечной скоростью v_∞, при параболическом движении — с нулевой скоростью*. Начальная скорость $v_п$, которую надо сообщить материальной точке, чтобы она стала двигаться по параболе, называется *параболической скоростью*. Параболическую скорость можно определить из уравнения (57.1), подставив в него $E = 0$. Если r_0 — начальное значение радиуса r, то

$$\frac{mv_п^2}{2} - G\frac{Mm}{r_0} = 0,$$

откуда

$$v_п = \sqrt{2G\frac{M}{r_0}}. \tag{57.5}$$

Параболическая скорость связана простым соотношением с *«круговой»* скоростью $v_к$. Так называется скорость, которой должна обладать планета, чтобы под действием гравитационной силы Солнца двигаться вокруг него по кругу радиуса r_0. Она найдется, если центростремительное ускорение $v_к^2/r_0$ приравнять гравитационной силе $G\frac{M}{r_0^2}$, действующей на единицу массы. Это дает

$$v_к = \sqrt{G\frac{M}{r_0}}. \tag{57.6}$$

Таким образом,

$$v_п = v_к\sqrt{2}. \tag{57.7}$$

ЗАДАЧИ

1. Допустим, что в результате взрыва астероид, двигавшийся по круговой орбите вокруг Солнца, распался на два осколка одинаковой массы. Один осколок непосредственно после взрыва остановился, другой продолжал движение. По какой траектории будет двигаться второй осколок: эллиптической, гиперболической или параболической?

Ответ. По гиперболической.

2. В условиях предыдущей задачи оба осколка разлетаются в перпендикулярных направлениях с одинаковыми скоростями. По каким орбитам они будут двигаться?

Ответ. Оба осколка будут двигаться по параболам.

§ 58. Вычисление параметров орбиты

1. Длины большой и малой осей эллиптической орбиты планеты можно рассчитать с помощью законов сохранения энергии и момента импульса. В *перигелии* P и в *афелии* A (рис. 179) радиальная скорость планеты равна нулю. Поэтому, полагая в уравнении (57.3) $v_r = 0$, получим для этих точек

$$r^2 + G\frac{Mm}{E}r - \frac{L^2}{2mE} = 0. \qquad (58.1)$$

При $E < 0$ это квадратное уравнение имеет два вещественных положительных корня r_1 и r_2. Один из корней соответствует перигелию P, другой — афелию A. Сумма корней $r_1 + r_2$ дает длину *большой оси* эллипса. Пользуясь для этой длины стандартным обозначением $2a$, получим

$$2a = r_1 + r_2 = -G\frac{Mm}{E} = -G\frac{M}{\varepsilon}, \qquad (58.2)$$

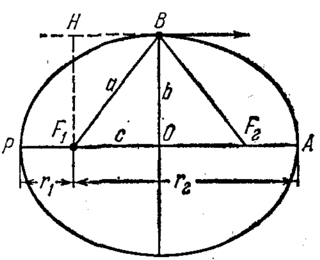

Рис. 179.

где $\varepsilon = E/m$ — полная энергия, приходящаяся на единицу массы планеты. Так как для движения по эллипсу $\varepsilon < 0$, то выражение (58.2) существенно положительно, как это и должно быть.

Круговые траектории являются вырожденными случаями эллиптических. Условие движения по круговой орбите найдется из уравнения (58.2), если в нем положить $r_1 = r_2 = r$. Тогда получится $2E = -G\frac{Mm}{r}$, или $2E = U$. Записав это в виде $E = U - E$ и воспользовавшись соотношением $E = K + U$, получим

$$E = -K. \qquad (58.3)$$

Таким образом, *при круговом движении сумма полной и кинетической энергий равна нулю.* Нетрудно показать, что это условие снова приводит к формуле (57.6).