## ЗАДАЧИ

1. Допустим, что в результате взрыва астероид, двигавшийся по круговой орбите вокруг Солнца, распался на два осколка одинаковой массы. Один осколок непосредственно после взрыва остановился, другой продолжал движение. По какой траектории будет двигаться второй осколок: эллиптической, гиперболической или параболической?

Ответ. По гиперболической.

2. В условиях предыдущей задачи оба осколка разлетаются в перпендикулярных направлениях с одинаковыми скоростями. По каким орбитам они будут двигаться?

Ответ. Оба осколка будут двигаться по параболам.

## § 58. Вычисление параметров орбиты

1. Длины большой и малой осей эллиптической орбиты планеты можно рассчитать с помощью законов сохранения энергии и момента импульса. В *перигелии* $P$ и в *афелии* $A$ (рис. 179) радиальная скорость планеты равна нулю. Поэтому, полагая в уравнении (57.3) $v_r = 0$, получим для этих точек

$$r^2 + G\frac{Mm}{E}r - \frac{L^2}{2mE} = 0. \tag{58.1}$$

При $E < 0$ это квадратное уравнение имеет два вещественных положительных корня $r_1$ и $r_2$. Один из корней соответствует перигелию $P$, другой — афелию $A$. Сумма корней $r_1 + r_2$ дает длину *большой оси* эллипса. Пользуясь для этой длины стандартным обозначением $2a$, получим

$$2a = r_1 + r_2 = -G\frac{Mm}{E} = -G\frac{M}{\varepsilon}, \tag{58.2}$$

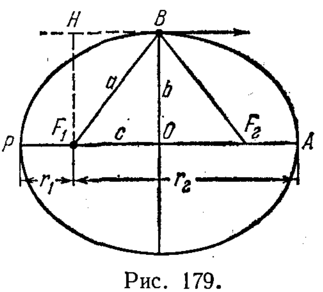


Рис. 179.

где $\varepsilon = E/m$ — полная энергия, приходящаяся на единицу массы планеты. Так как для движения по эллипсу $\varepsilon < 0$, то выражение (58.2) существенно положительно, как это и должно быть.

Круговые траектории являются вырожденными случаями эллиптических. Условие движения по круговой орбите найдется из уравнения (58.2), если в нем положить $r_1 = r_2 = r$. Тогда получится $2E = -G\frac{Mm}{r}$, или $2E = U$. Записав это в виде $E = U - E$ и воспользовавшись соотношением $E = K + U$, получим

$$E = -K. \tag{58.3}$$

Таким образом, *при круговом движении сумма полной и кинетической энергий равна нулю*. Нетрудно показать, что это условие снова приводит к формуле (57.6).

Для эллиптического движения формула (58.3) также справедлива, но под $K$ следует понимать *среднее по времени* значение кинетической энергии планеты. Действительно, эллиптическое движение финитно, и к нему можно применить теорему вириала (§ 25, п. 6). Применительно к движению планеты эта теорема дает

$$\overline{K}=-\frac{1}{2}\overline{\mathbf{rF}}=\frac{1}{2}\overline{rF}=\frac{GMm}{2}\left(\overline{\frac{1}{r}}\right)=-\frac{1}{2}\overline{U}.$$

Вычитая из обеих частей $\frac{1}{2}\overline{K}$ и учитывая, что $E=\overline{K}+\overline{U}$, получим

$$\overline{K}=-E.$$

Это и доказывает наше утверждение.

2. Найдем теперь длину *малой полуоси* эллипса $b$. Для этого помимо энергии надо знать еще момент количества движения планеты или ее секториальную скорость $\sigma=\dot{S}$. Большую ось эллипса можно считать известной, поскольку она однозначно определяется энергией планеты. Пусть $B$ — одна из точек, в которых малая ось пересекается с эллипсом (рис. 179). Так как сумма расстояний любой точки эллипса от его фокусов $F_1$ и $F_2$ постоянна и равна $2a$, то $F_1B=a$. Секториальная скорость в точке $B$ равна

$$\sigma=\frac{1}{2}vb, \tag{58.4}$$

так как $b$ есть длина перпендикуляра $F_1H$, опущенного из фокуса $F_1$ на направление скорости в этой точке. Скорость $v$ в точке $B$ определится из уравнения энергии. Полагаем в нем $r=a$ и находим

$$\frac{v^2}{2}-G\frac{M}{a}=\varepsilon.$$

Подставив сюда выражение для $\varepsilon$ из (58.2), определим $v$. После этого найдем

$$b=2\sigma\sqrt{\frac{a}{GM}}. \tag{58.5}$$

3. Распространим теперь полученные результаты на случай *гиперболического движения*. Для этого воспользуемся искусственным приемом, указанным в п. 4 § 56. По правой ветви гиперболы (рис. 177) движется комета, по левой — соответствующая ей вспомогательная материальная точка. Эти движения описываются одним и тем же уравнением (57.3). В вершинах гиперболы $P$ и $A$ радиальная скорость $v_r$ равна нулю, и мы снова приходим к квадратному уравнению (58.1). Однако теперь энергия $E$ положительна, так что знаки корней этого уравнения противоположны. Положительный корень $r_1$ соответствует вершине $P$, отрицательный $r_2$ — вершине $A$. Сумма обоих корней $r_1+r_2$ отрицательна. По абсолютной величине эта сумма равна расстоянию между вершинами $P$ и $A$. Используя для этого расстояния стандартное обозначение $AP=2a$, получим

$$2a=-(r_1+r_2)=G\frac{Mm}{E}=G\frac{M}{\varepsilon}. \tag{58.6}$$

Эта формула в точности совпала бы с формулой (58.2), если бы условиться расстояние между вершинами гиперболы считать величиной отрицательной.

4. Найдем теперь аналог формулы (58.4) для гиперболического движения. Расстояние между фокусами $F_1F_2$ принято обозначать $2c$, а под $b$ понимать квадратный корень $b = \sqrt{c^2 - a^2}$. Проведем через фокус $F_2$ прямую, параллельную одной из асимптот гиперболы (рис. 180). Из фокуса $F_1$ на прямую $F_2M$ опустим перпендикуляр $F_1M$. Длину отрезка $F_2M$ можно рассматривать как разность расстояний от фокусов $F_1$ и $F_2$ до бесконечно удаленной точки, в которой пересекаются параллельные прямые $F_2M$ и $OB$. Поэтому в силу известного свойства гиперболы $F_2M = 2a$. На основании теоремы Пифагора заключаем далее, что расстояние $F_1M$ равно $2b$. Секториальную скорость, как величину постоянную, достаточно вычислить для точки, движущейся в бесконечности. Радиус-вектор такой точки в единицу времени описывает треугольник с основанием $v_\infty$ и высотой $F_1B = b$. Его площадь

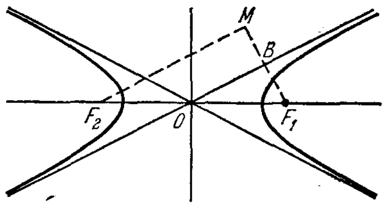


Рис. 180.

$$\sigma = \frac{1}{2} b v_\infty \tag{58.7}$$

и дает секториальную скорость. При этом величина $v_\infty$ определяется формулой (57.4), которую можно записать также в виде

$$\frac{v_\infty^2}{2} = \varepsilon. \tag{58.8}$$

Угол $\vartheta$ между асимптотами гиперболы можно вычислить по формуле

$$\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} = \frac{b}{a} = \frac{b v_\infty^2}{GM}. \tag{58.9}$$

5. Параметр $p$ для эллипса и гиперболы определяется выражением $p = b^2/a$. Подставляя сюда соответствующие значения для $b$ и $a$, в обоих случаях найдем

$$p = \frac{4\sigma^2}{GM}. \tag{58.10}$$

Той же формулой определяется параметр $p$ и для параболы, поскольку парабола является предельной кривой, в которую переходят эллипс и гипербола. Для параболы параметр $p$ является единственной величиной, определяющей ее форму.

6. Вид траектории планеты, конечно, определяется начальными условиями, т. е. положением и скоростью планеты в некоторый момент времени, который условно можно принять за начальный. Иллюстрируем это следующим примером. Пусть $S$ — Солнце, а $A$ — начальное положение планеты (рис. 181). Расстояние $AS$ обозначим $r_0$. Будем сообщать планете в точке $A$ скорость $v_0$ в направлении, перпендикулярном к $AS$. Посмотрим, как будет меняться вид траектории при изменении величины $v_0$. Если полная

энергия планеты отрицательна, т. е. $v_0$ меньше параболической скорости $v_п$, то траекторией планеты будет эллипс. При $v_0 = 0$ эллипс вырождается в прямую, проходящую через Солнце $S$. Если $v_0 = v_к$, то планета будет двигаться по кругу. В этом случае точки $A$ и $C$ равноудалены от Солнца. Расстояние между ними (большая ось) равно $2r_0$. При уменьшении энергии большая ось эллипса уменьшается. При $v_0 < v_к$ она становится меньше $2r_0$. В этом случае

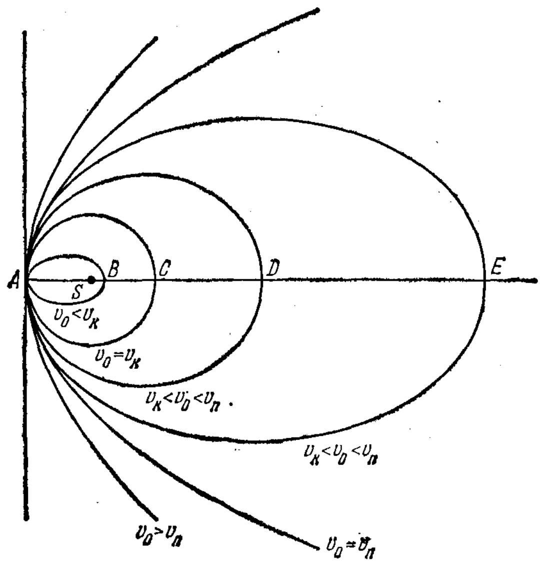


Рис. 181.

точка $A$ удалена от Солнца $S$ дальше (афелий), чем точка $B$ (перигелий). При $v_0 > v_к$, наоборот, большая ось эллипса больше $2r_0$, т. е. перигелием будет точка $A$, а афелием — точка $D$ (или $E$). При $v = v_п = v_к\sqrt{2}$ траекторией будет парабола. При $v > v_п$ она переходит в гиперболу. Все эти результаты представлены в следующей таблице:

| Начальная скорость | Траектория планеты |
|---|---|
| $v_0=0$ | Прямая, проходящая через Солнце |
| $v_0<v_к$ | Эллипс с перигелием в точке $B$ и афелием в точке $A$ |
| $v_0=v_к$ | Окружность с центром в точке нахождения Солнца |
| $v_к<v_0<v_п$ | Эллипс с перигелием в точке $A$ и афелием в точке $D$ |
| $v_0=v_п$ | Парабола |
| $v_0>v_п$ | Гипербола |

### ЗАДАЧА

В классических опытах Резерфорда исследовалось рассеяние $\alpha$-частиц на атомных ядрах различных химических элементов. Считая ядро бесконечно тяжелым и полагая, что рассеяние вызывается кулоновскими силами отталкивания, показать, что угол отклонения скорости $\alpha$-частицы от первоначального направления полета $\theta$ связан с прицельным расстоянием $b$ соотношением

$$\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}=\frac{mbv_{\infty}^2}{2Ze^2}, \tag{58.11}$$

где $m$ — масса $\alpha$-частицы, $v_\infty$ — ее скорость вдали от ядра, $2e$ — ее заряд, $Ze$ — заряд ядра ($e$ — элементарный заряд, $Z$ — порядковый номер элемента).

Примечание. *Прицельным расстоянием* называется длина перпендикуляра, опущенного из рассеивающего центра (ядра) на исходное направление касательной к траектории, когда рассеиваемая частица находилась в бесконечности.

Мы воспользуемся формулой (58.11) в атомной физике при рассмотрении опытов Резерфорда.

## § 59. Учет движения Солнца

**1.** При рассмотрении планетных движений мы не учитывали движения Солнца, считая его массу бесконечно большой по сравнению с массой планеты. Для ускорения планеты мы писали

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}=m\boldsymbol{a}_{\text{абс}}=\boldsymbol{F}, \tag{59.1}$$

где $\boldsymbol{F}=-G\frac{Mm}{r^3}\boldsymbol{r}$ — ньютонова сила гравитационного притяжения, действующая на планету со стороны Солнца. Символом $\boldsymbol{a}_{\text{абс}}$ обозначено ускорение планеты относительно какой-то инерциальной системы отсчета, например системы Коперника. Учтем теперь движение Солнца. Чтобы получить уравнение движения планеты относительно Солнца, надо массу планеты $m$ заменить на приведенную массу $\mu=\frac{Mm}{M+m}$ (см. § 20). В результате уравнение относительного движения примет вид

$$\mu\ddot{\boldsymbol{r}}\equiv\mu\boldsymbol{a}_{\text{отн}}=\boldsymbol{F}.$$

Подставив выражение для $\mu$, получим

$$m\boldsymbol{a}_{\text{отн}}=\left(1+\frac{m}{M}\right)\boldsymbol{F}. \tag{59.2}$$

Формально дело происходит так, как если бы Солнце оставалось неподвижным, но гравитационная постоянная увеличилась в $1+m/M$ раз. Поэтому *для относительного движения первый и второй законы Кеплера остаются справедливыми*. Зато третий закон должен быть уточнен. Для этого достаточно в формуле (55.5) постоянную $G$ заменить на $G\,(1+m/M)$. Это приводит к соотношению

$$\frac{a^3}{T^2\,(M+m)}=\frac{G}{4\pi^2}. \tag{59.3}$$