ЗАДАЧА

В классических опытах Резерфорда исследовалось рассеяние α-частиц на атомных ядрах различных химических элементов. Считая ядро бесконечно тяжелым и полагая, что рассеяние вызывается кулоновскими силами отталкивания, показать, что угол отклонения скорости α-частицы от первоначального направления полета θ связан с прицельным расстоянием b соотношением

$$\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}=\frac{mbv_\infty^2}{2Ze^2}, \tag{58.11}$$

где m — масса α-частицы, v_∞ — ее скорость вдали от ядра, $2e$ — ее заряд, Ze — заряд ядра (e — элементарный заряд, Z — порядковый номер элемента).

Примечание. *Прицельным расстоянием* называется длина перпендикуляра, опущенного из рассеивающего центра (ядра) на исходное направление касательной к траектории, когда рассеиваемая частица находилась в бесконечности.

Мы воспользуемся формулой (58.11) в атомной физике при рассмотрении опытов Резерфорда.

§ 59. Учет движения Солнца

1. При рассмотрении планетных движений мы не учитывали движения Солнца, считая его массу бесконечно большой по сравнению с массой планеты. Для ускорения планеты мы писали

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}=m\boldsymbol{a}_{\text{абс}}=\boldsymbol{F}, \tag{59.1}$$

где $\boldsymbol{F}=-G\frac{Mm}{r^3}\boldsymbol{r}$ — ньютонова сила гравитационного притяжения, действующая на планету со стороны Солнца. Символом $\boldsymbol{a}_{\text{абс}}$ обозначено ускорение планеты относительно какой-то инерциальной системы отсчета, например системы Коперника. Учтем теперь движение Солнца. Чтобы получить уравнение движения планеты относительно Солнца, надо массу планеты m заменить на приведенную массу $\mu=\frac{Mm}{M+m}$ (см. § 20). В результате уравнение относительного движения примет вид

$$\mu\ddot{\boldsymbol{r}}\equiv\mu\boldsymbol{a}_{\text{отн}}=\boldsymbol{F}.$$

Подставив выражение для μ, получим

$$m\boldsymbol{a}_{\text{отн}}=\left(1+\frac{m}{M}\right)\boldsymbol{F}. \tag{59.2}$$

Формально дело происходит так, как если бы Солнце оставалось неподвижным, но гравитационная постоянная увеличилась в $1+m/M$ раз. Поэтому *для относительного движения первый и второй законы Кеплера остаются справедливыми*. Зато третий закон должен быть уточнен. Для этого достаточно в формуле (55.5) постоянную G заменить на $G(1+m/M)$. Это приводит к соотношению

$$\frac{a^3}{T^2(M+m)}=\frac{G}{4\pi^2}. \tag{59.3}$$

Оно показывает, что *отношение* $\frac{a^3}{T^2(M+m)}$ *является универсальной постоянной, т. е. не зависит ни от масс взаимодействующих тел, ни от расстояния между ними.* Таким образом, *третий закон Кеплера для относительного движения не вполне точен.* То обстоятельство, что для планет Солнечной системы он выполняется с большой точностью, связано с тем, что масса планеты очень мала по сравнению с массой Солнца.

Отметим еще соотношение

$$\frac{a_{\text{отн}}}{a_{\text{абс}}} = 1 + \frac{m}{M}, \tag{59.4}$$

которое непосредственно следует из сравнения формул (59.1) и (59.2).

2. На формулах (55.5) и (59.3) основано определение масс планет, имеющих спутников, а также масс двойных звезд. Если масса спутника пренебрежимо мала по сравнению с массой планеты, то для движения спутника справедлив третий закон Кеплера в форме (55.5). Постоянную Кеплера $\mathscr{K}$ можно вычислить, измерив размеры орбиты и время обращения спутника. Зная гравитационную постоянную G, по формуле (55.5) можно вычислить массу планеты M в абсолютных единицах. В астрономии, однако, предпочитают за единицу массы принимать массу Земли. Для определения масс планет в таких единицах не требуется знать численное значение гравитационной постоянной, известное не очень точно.

В качестве примера найдем отношение массы Солнца $M_С$ к массе Земли $m_З$. Массу Земли будем считать пренебрежимо малой по сравнению с массой Солнца. Точно так же пренебрежем массой Луны по сравнению с массой Земли. Для земной орбиты имеем $a_З = 1{,}496 \cdot 10^8$ км, $T_З = 365{,}26$ суток, для лунной $a_Л = 3{,}844 \cdot 10^5$ км, $T_Л = 27{,}32$ суток. По формуле (55.5) получаем

$$\frac{M_С}{m_З} = \left(\frac{a_З}{a_Л}\right)^3 \left(\frac{T_Л}{T_З}\right)^2 = 3{,}298 \cdot 10^5.$$

В действительности, как видно из формулы (59.3), таким путем находится отношение $\frac{M_С + m_З}{m_З + m_Л}$. Метод дает отношение масс центральных тел, вокруг которых вращаются спутники, только тогда, когда масса каждого спутника пренебрежимо мала по сравнению с массой соответствующего центрального тела. Это условие идеально соблюдается для искусственных спутников. Например, можно найти отношение масс Луны и Земли, если измерить параметры орбит искусственных спутников, обращающихся вокруг них.

ЗАДАЧИ

1. Найти расстояние R между компонентами двойной звезды, если их общая масса $M_1 + M_2$ равна удвоенной массе Солнца M_0, и звезды обращаются по круговым орбитам вокруг их центра масс с периодом $T = 2T_0$, где T_0 — продолжительность земного года. Расстояние от Земли до Солнца $R_0 = 1{,}5 \cdot 10^8$ км.

Ответ: $R = \sqrt[3]{\left(\frac{T}{T_0}\right)^2 \frac{M_1+M_2}{M_0}} = 2R_0 = 3 \cdot 10^8$ км.

2. Минимальное расстояние между компонентами двойной звезды, обращающимися один относительно другого, равно r_1. Относительная скорость их в этом положении равна v_1. Сумма масс обоих компонентов равна M. Найти расстояние между компонентами r_2 и их относительную скорость v_2 при максимальном удалении относительно друг друга. При каком минимальном значении относительной скорости v_1 двойная звезда распадется?

Ответ. $r_2 = \left(\frac{2GM}{2GM - r_1 v_1^2} - 1\right) r_1; \quad v_2 = \frac{r_1}{r_2} v_1.$

Звезда распадается, если $v_1 \geqslant \sqrt{\frac{2GM}{r_1}}$.

§ 60. Применение закона всемирного тяготения к проблеме земной тяжести

По мысли Ньютона, вес тел на Земле является проявлением силы гравитационного притяжения между рассматриваемым телом и Землей *). Для проверки этой идеи Ньютон сравнил ускорение свободного падения тел у поверхности Земли с ускорением Луны на орбите, по которой она движется относительно Земли.

Допустим, что вещество внутри земного шара распределено сферически симметрично, т. е. его плотность зависит только от расстояния до центра Земли. В этом случае, как было показано в § 55, Земля создает во внешнем пространстве такое же гравитационное поле, что и материальная точка той же массы, помещенная в центре Земли. Если верна гипотеза Ньютона, то ускорение силы тяжести $g_{\text{абс}}$ на расстоянии r от центра Земли должно определяться формулой

$$g_{\text{абс}} = G\frac{M}{r^2}, \tag{60.1}$$

где M — масса Земли. Той же формулой должно определяться ускорение Луны $a_{\text{Л}}$ на ее орбите:

$$a_{\text{Л}} = G\frac{M}{R^2}, \tag{60.2}$$

где R — радиус лунной орбиты. Таким образом,

$$g_{\text{абс}} = a_{\text{Л}}\left(\frac{R}{r}\right)^2. \tag{60.3}$$

*) Сила веса, о которой идет речь в этом утверждении, строго говоря, равна силе гравитационного притяжения только в том случае, когда взвешивание производится на весах, покоящихся или не имеющих ускорения относительно инерциальной системы отсчета (см. § 66).