ЗАДАЧИ

1. Найти расстояние R между компонентами двойной звезды, если их общая масса $M_1 + M_2$ равна удвоенной массе Солнца M_0, и звезды обращаются по круговым орбитам вокруг их центра масс с периодом $T = 2T_0$, где T_0 — продолжительность земного года. Расстояние от Земли до Солнца $R_0 = 1{,}5 \cdot 10^8$ км.

Ответ: $R = \sqrt[3]{\left(\frac{T}{T_0}\right)^2 \frac{M_1+M_2}{M_0}} = 2R_0 = 3 \cdot 10^8$ км.

2. Минимальное расстояние между компонентами двойной звезды, обращающимися один относительно другого, равно r_1. Относительная скорость их в этом положении равна v_1. Сумма масс обоих компонентов равна M. Найти расстояние между компонентами r_2 и их относительную скорость v_2 при максимальном удалении относительно друг друга. При каком минимальном значении относительной скорости v_1 двойная звезда распадется?

Ответ. $r_2 = \left(\frac{2GM}{2GM - r_1 v_1^2} - 1\right) r_1$; $v_2 = \frac{r_1}{r_2} v_1$.

Звезда распадается, если $v_1 \geqslant \sqrt{\frac{2GM}{r_1}}$.

§ 60. Применение закона всемирного тяготения к проблеме земной тяжести

По мысли Ньютона, вес тел на Земле является проявлением силы гравитационного притяжения между рассматриваемым телом и Землей *). Для проверки этой идеи Ньютон сравнил ускорение свободного падения тел у поверхности Земли с ускорением Луны на орбите, по которой она движется относительно Земли.

Допустим, что вещество внутри земного шара распределено сферически симметрично, т. е. его плотность зависит только от расстояния до центра Земли. В этом случае, как было показано в § 55, Земля создает во внешнем пространстве такое же гравитационное поле, что и материальная точка той же массы, помещенная в центре Земли. Если верна гипотеза Ньютона, то ускорение силы тяжести $g_{\text{абс}}$ на расстоянии r от центра Земли должно определяться формулой

$$g_{\text{абс}} = G\frac{M}{r^2}, \tag{60.1}$$

где M — масса Земли. Той же формулой должно определяться ускорение Луны $a_{\text{Л}}$ на ее орбите:

$$a_{\text{Л}} = G\frac{M}{R^2}, \tag{60.2}$$

где R — радиус лунной орбиты. Таким образом,

$$g_{\text{абс}} = a_{\text{Л}}\left(\frac{R}{r}\right)^2. \tag{60.3}$$

*) Сила веса, о которой идет речь в этом утверждении, строго говоря, равна силе гравитационного притяжения только в том случае, когда взвешивание производится на весах, покоящихся или не имеющих ускорения относительно инерциальной системы отсчета (см. § 66).

Если $a_Л$ известно, то с помощью этой формулы можно вычислить ускорение свободного падения $g_{абс}$ на поверхности Земли. Это и было сделано Ньютоном.

Ускорение Луны $a_Л$ можно вычислить, зная R и период обращения Луны по ее орбите T (относительно звезд). Эти величины равны соответственно $R = 3{,}844 \cdot 10^5$ км, $T = 27{,}32$ суток. Используя их, находим

$$a_Л = \frac{4\pi^2}{T^2} R = 0{,}2723 \text{ см/с}^2. \qquad (60.4)$$

Средний радиус земного шара r, определяемый из условия, чтобы величина $\frac{4\pi}{3} r^3$ равнялась объему Земли, равен $r = 6371$ км. Подставляя эти данные в формулу (60.3), получим $g_{абс} = 991{,}4$ см/с^2. Эта величина близка к экспериментальным значениям: на полюсе $g_{абс} = 983{,}2$ см/с^2, на экваторе $g_{абс} = 981{,}4$ см/с^2. Близкое совпадение может рассматриваться как подтверждение гипотезы Ньютона. Небольшое расхождение обусловлено, главным образом, тем, что мы не учли движение самой Земли. Формула (60.4) дает ускорение Луны относительно Земли $(a_Л)_{отн}$, тогда как в формулу (60.3) должно входить ускорение Луны относительно инерциальной системы отсчета $(a_Л)_{абс}$. Согласно формуле (59.4) эти ускорения связаны между собой соотношением

$$(a_Л)_{отн} = \left(1 + \frac{m}{M}\right)(a_Л)_{абс},$$

где m — масса Луны. Следовательно, вычисленное выше значение $g_{абс}$ надо уменьшить в $(1 + m/M)$ раз. Отношение массы Луны к массе Земли составляет $m/M = 1/81$. Введя эту поправку, получим $g_{абс} = 979{,}3$ см/с^2, что значительно лучше согласуется с опытом. Оставшееся небольшое расхождение можно объяснить отступлениями формы Земли от шаровой.

Заметим, что с помощью формулы (60.1) можно вычислить массу Земли. Для этого надо знать численное значение гравитационной постоянной G.

ЗАДАЧИ

1. Показать, что если высота над земной поверхностью мала по сравнению с радиусом Земли R, то зависимость ускорения силы тяжести от высоты определяется приближенной формулой

$$g \approx g_0\left(1 - 2\frac{h}{R}\right) \approx g_0(1 - 0{,}00314h),$$

где g_0 — значение g на земной поверхности. Предполагается, что высота h измеряется в километрах.

2. Для вычисления средней плотности Земли δ Эйри (1801—1892) предложил и осуществил следующий метод. Измеряются ускорения силы тяжести g_0

на поверхности Земли и g в шахте глубины h. Принимается, что плотность Земли в поверхностном слое толщины h однородна и равна $\delta_0 = 2{,}5$ г/см³. (Это предположение плохо соответствует действительности.) В опытах Эйри было $g - g_0 = 0{,}000052\ g_0$, $R/h = 16\,000$ (R — радиус Земли). Пользуясь этими данными, вычислить среднюю плотность Земли. (Обратите внимание, что g вблизи поверхности Земли возрастает с глубиной! Чем это объясняется?)

Ответ. $\delta \approx \dfrac{3\delta_0}{2 - \dfrac{g-g_0}{g_0}\dfrac{R}{h}} \approx 6{,}5$ г/см³.

3. Допустим, что в земном шаре вдоль оси его вращения просверлен канал от полюса к полюсу. Как будет двигаться материальная точка, помещенная в такой канал без начальной скорости? Плотность вещества земного шара ρ считать однородной.

Ответ. Точка будет совершать гармонические колебания с круговой частотой, определяемой соотношением $\omega^2 = \frac{4\pi}{3}\rho G = \frac{g}{R}$, где R — радиус земного шара, g — ускорение силы тяжести на поверхности Земли. Период этих колебаний $T = 2\pi\sqrt{R/g} \approx 84$ мин. Интересно отметить, что *период колебаний зависит только от плотности шара, но не зависит от его размеров.*

8. Определить начальную скорость метеоритов v_∞, если максимальное прицельное расстояние, при котором они еще падают на Землю, равно l ($l > R$, где R — радиус земного шара). Получить численный ответ при $l = 2R$. (См. примечание к задаче § 58.)

Ответ. $v_\infty = R\sqrt{\dfrac{2gR}{l^2 - R^2}}$. При $l = 2R$ $v_\infty = \sqrt{\dfrac{2}{3}gR} \approx 6{,}5$ км/с.

5. Вычислить массу Земли, используя параметры орбиты советского искусственного спутника «Космос-380». Период обращения спутника (относительно звезд) $T = 102{,}2$ мин, расстояние до поверхности Земли в перигее 210 км, в апогее 1548 км. Землю считать шаром с радиусом 6371 км.

Ответ. $M = \dfrac{4\pi^2}{G}\dfrac{a^3}{T^2} \approx 6 \cdot 10^{27}$ г, где a — радиус круговой орбиты спутника.

§ 61. Космические скорости

1. Теория финитных и инфинитных движений планет, изложенная в § 57, полностью применима к движению искусственных спутников Земли и космических кораблей (разумеется, с выключенными двигателями). Сопротивление воздуха мы не будем учитывать, предполагая, что движение происходит в достаточно разреженной атмосфере. Кроме того, при движении вблизи Земли мы будем пренебрегать силами гравитационного притяжения Солнца, Луны и планет. Массу Земли будем обозначать буквой M, массу искусственного спутника — буквой m.

Полная энергия спутника или космического корабля в поле земного тяготения равна

$$E = \frac{mv^2}{2} - G\frac{Mm}{r},$$

или в силу соотношения (60.1)

$$E = \frac{mv^2}{2} - mrg_{\text{абс}}. \qquad (61.1)$$