на поверхности Земли и g в шахте глубины h. Принимается, что плотность Земли в поверхностном слое толщины h однородна и равна $\delta_0 = 2{,}5$ г/см³. (Это предположение плохо соответствует действительности.) В опытах Эйри было $g - g_0 = 0{,}000052\, g_0$, $R/h = 16\,000$ (R — радиус Земли). Пользуясь этими данными, вычислить среднюю плотность Земли. (Обратите внимание, что g вблизи поверхности Земли возрастает с глубиной! Чем это объясняется?)

Ответ. $\delta \approx \dfrac{3\delta_0}{2 - \dfrac{g-g_0}{g_0}\dfrac{R}{h}} \approx 6{,}5$ г/см³.

3. Допустим, что в земном шаре вдоль оси его вращения просверлен канал от полюса к полюсу. Как будет двигаться материальная точка, помещенная в такой канал без начальной скорости? Плотность вещества земного шара ρ считать однородной.

Ответ. Точка будет совершать гармонические колебания с круговой частотой, определяемой соотношением $\omega^2 = \dfrac{4\pi}{3}\rho G = \dfrac{g}{R}$, где R — радиус земного шара, g — ускорение силы тяжести на поверхности Земли. Период этих колебаний $T = 2\pi\sqrt{R/g} \approx 84$ мин. Интересно отметить, что *период колебаний зависит только от плотности шара, но не зависит от его размеров.*

8. Определить начальную скорость метеоритов v_∞, если максимальное прицельное расстояние, при котором они еще падают на Землю, равно l ($l > R$, где R — радиус земного шара). Получить численный ответ при $l = 2R$. (См. примечание к задаче § 58.)

Ответ. $v_\infty = R\sqrt{\dfrac{2gR}{l^2 - R^2}}$. При $l = 2R$ $v_\infty = \sqrt{\dfrac{2}{3}gR} \approx 6{,}5$ км/с.

5. Вычислить массу Земли, используя параметры орбиты советского искусственного спутника «Космос-380». Период обращения спутника (относительно звезд) $T = 102{,}2$ мин, расстояние до поверхности Земли в перигее 210 км, в апогее 1548 км. Землю считать шаром с радиусом 6371 км.

Ответ. $M = \dfrac{4\pi^2}{G}\dfrac{a^3}{T^2} \approx 6 \cdot 10^{27}$ г, где a — радиус круговой орбиты спутника.

§ 61. Космические скорости

1. Теория финитных и инфинитных движений планет, изложенная в § 57, полностью применима к движению искусственных спутников Земли и космических кораблей (разумеется, с выключенными двигателями). Сопротивление воздуха мы не будем учитывать, предполагая, что движение происходит в достаточно разреженной атмосфере. Кроме того, при движении вблизи Земли мы будем пренебрегать силами гравитационного притяжения Солнца, Луны и планет. Массу Земли будем обозначать буквой M, массу искусственного спутника — буквой m.

Полная энергия спутника или космического корабля в поле земного тяготения равна

$$E = \frac{mv^2}{2} - G\frac{Mm}{r},$$

или в силу соотношения (60.1)

$$E = \frac{mv^2}{2} - mrg_{\text{абс}}. \tag{61.1}$$

(В дальнейшем будем писать просто g вместо $g_{\text{абс}}$.) Если энергия E отрицательна, то движение финитно и будет происходить по эллиптической траектории. При круговом движении

$$v_{\text{к}} = \sqrt{G\frac{M}{r}} = \sqrt{gr}. \tag{61.2}$$

Если r — радиус земного шара, то получаемая по этой формуле величина называется *первой космической скоростью*. Она приблизительно равна 8 км/с.

Минимальное значение энергии E, при котором движение становится инфинитным, равно нулю. В этом случае получается движение по параболе со скоростью

$$v_{\text{п}} = \sqrt{2gr} = v_{\text{к}}\sqrt{2} \approx 11{,}2 \text{ км/с}, \tag{61.3}$$

называемой *параболической* или *второй космической скоростью*. Это есть минимальная скорость, которую необходимо сообщить телу, чтобы оно никогда не вернулось на Землю (при условии, что тело не подвергается гравитационному действию со стороны других небесных тел).

Если, наконец, полная энергия E положительна, т. е. начальная скорость тела превосходит вторую космическую скорость, то его движение станет гиперболическим.

2. Совершенно аналогичные вычисления можно провести и для движений в гравитационном поле Солнца. Среднее расстояние до Солнца составляет 150 миллионов километров. Скорость Земли при круговом движении на таком расстоянии $\sim$ 29,8 км/с. Для того, чтобы при запуске с такого расстояния тело навсегда покинуло пределы Солнечной системы, надо сообщить ему скорость относительно Солнца не меньше $29{,}8\sqrt{2} \approx 42{,}1$ км/с. Находясь на Земле, тело движется вместе с ней вокруг Солнца со скоростью 29,8 км/с. Если бы тело не подвергалось действию земного притяжения, то ему достаточно было бы сообщить относительно Земли дополнительную скорость $42{,}1 - 29{,}8 = 12{,}3$ км/с в направлении ее движения, чтобы относительно Солнца оно стало двигаться с параболической скоростью и навсегда покинуло пределы Солнечной системы. В действительности для этого требуется бо́льшая скорость, так как тело дополнительно должно преодолеть действие земного притяжения. Скорость относительно Земли, которую необходимо сообщить телу, чтобы оно навсегда покинуло пределы Солнечной системы, называется *третьей космической скоростью*. Величина третьей космической скорости зависит от того, в каком направлении корабль выходит из зоны действия земного тяготения. Она минимальна, если это направление совпадает с направлением орбитального движения Земли вокруг Солнца, и максимальна, когда эти направления противоположны.

Точное вычисление третьей космической скорости довольно кропотливо, так как при этом надо учесть гравитационное взаимодействие трех тел; Солнца, Земли и космического корабля. Однако такое вычисление не представляет большого труда, если пренебречь влиянием поля тяготения Солнца на движение космического корабля в течение всего времени, которое он затрачивает для выхода из зоны действия земного тяготения *). Будем обозначать малыми буквами (v, $v_к$, $v_п$) скорости корабля относительно Земли. Все скорости относительно Солнца будем обозначать большими буквами (V, $V_к$, $V_п$). Пока корабль движется в поле земного тяготения, его движение удобнее относить к системе отсчета, в которой Земля неподвижна. Считая массу Земли M бесконечно большой по сравнению с массой корабля m, запишем уравнение энергии в виде

$$\frac{mv^2}{2} - G\frac{Mm}{r} = \frac{mv_\infty^2}{2},$$

где v_∞ — скорость корабля в тот момент, когда он практически выходит из зоны действия земного тяготения. Вводя круговую скорость $v_к^2 = GM/r$, получим $v_\infty^2 = v^2 - 2v_к^2$. После того как корабль выйдет из зоны действия земного тяготения, будем относить его движение к системе отсчета, в которой неподвижно Солнце. В момент выхода из зоны земного тяготения скорость корабля V в этой системе равна векторной сумме скорости $\boldsymbol{v}_\infty$ и скорости кругового движения Земли $V_к$. Если корабль выходит из зоны земного тяготения под углом ϑ, то такой же угол будет между скоростями $\boldsymbol{v}_\infty$ и V. Значит,

$$V^2 = V_к^2 + v_\infty^2 + 2V_к v_\infty \cos\vartheta.$$

Третья космическая скорость v_3 найдется из условия $V = V_п = \sqrt{2}\,V_к$. Подставляя это значение для V в предыдущее соотношение, получим квадратное уравнение для v_∞, из которого найдем

$$v_\infty = \left(\sqrt{1+\cos^2\vartheta} - \cos\vartheta\right) V_к.$$

(Положительный знак перед квадратным корнем выбран потому, что величина v_∞ по своему смыслу существенно положительна.) После этого получим

$$v_3^2 = \left(\sqrt{1+\cos^2\vartheta} - \cos\vartheta\right)^2 V_к^2 + 2v_к^2. \tag{61.4}$$

Минимальное значение третьей космической скорости получится при $\vartheta = 0$ (запуск в направлении орбитального движения Земли), а максимальное при $\vartheta = \pi$ (запуск в направлении против орбитального движения Земли). Для этих значений формула (61.4) дает

$$\begin{aligned} v_3^{мин} &\approx \sqrt{0{,}171V_к^2 + 2v_к^2} \approx 16{,}7 \text{ км/с}, \\ v_3^{макс} &\approx \sqrt{5{,}828V_к^2 + 2v_к^2} \approx 72{,}7 \text{ км/с}. \end{aligned} \tag{61.5}$$

Вычислим теперь приближенно *четвертую космическую скорость* v_4. Так называется минимальная скорость, которую надо сообщить ракете, чтобы она могла упасть в заданную точку Солнца. Такая скорость зависит от положения этой точки на поверхности Солнца. На старте ракета движется вокруг Солнца вместе с Землей со скоростью $V_к$. Чтобы ракета упала на Солнце, ее движение

*) Более подробное рассмотрение показывает (см. § 65), что в действительности при таком расчете мы пренебрегаем не полем тяготения Солнца, а лишь его *неоднородностью* в той области пространства, где преобладающим является поле тяжести Земли. Однородная составляющая поля тяготения Солнца компенсируется силами инерции, возникающими из-за свободного падения Земли на Солнце. Поэтому ошибка, которую мы делаем при вычислении третьей космической скорости, ничтожна.

надо затормозить. Как и ранее, находим, что при выходе из зоны земного притяжения скорость ракеты будет $V = V_к + v_\infty$ (относительно Солнца). Наименьшая энергия, которую нужно затратить для замедления, получится тогда, когда скорости $V_к$ и v_∞ направлены противоположно. В этом случае $V = V_к - v_\infty$ (все скорости положительны), а энергия, приходящаяся на единицу массы ракеты, равна

$$\varepsilon = {}^1/_2 (V_к - v_\infty)^2 - GM/R = {}^1/_2 (V_к^2 + 2V_к v_\infty - v_\infty^2),$$

где $R = CA$ — расстояние ракеты до центра Солнца при ее максимальном удалении (рис. 181а). Если $\varepsilon < 0$, то траекторией ракеты будет эллипс с большой осью

$$2a = -\frac{GM}{\varepsilon} = \frac{2RV_к^2}{V_к^2 + 2V_к v_\infty - v_\infty^2}.$$

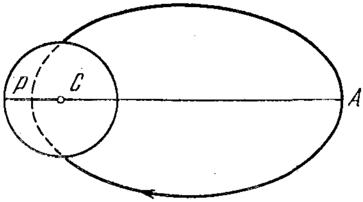

Рис. 181 а.

Один из фокусов эллипса находится в центре Солнца. Обозначим через $x = CP$ расстояние от центра Солнца до ближайшей вершины этого эллипса. Расстояние x однозначно определяет форму эллипса, а с ней и линию на поверхности Солнца, на которой будет лежать точка падения. Большая ось эллипса $2a = R + x$. Подставив это значение в предыдущее уравнение, придем к квадратному уравнению для v_∞. Меньший корень этого уравнения равен

$$v_\infty = V_к \left(1 - \sqrt{\frac{2x}{R+x}}\right).$$

Четвертая космическая скорость v_4 ракеты определится из соотношения $v_4^2 = v_\infty^2 + 2v_к^2$, или

$$v_4^2 = V_к^2 \left(1 - \sqrt{\frac{2x}{R+x}}\right)^2 + 2v_к^2.$$

Она зависит от параметра x, определяющего место падения. При $x = 0$ (прямолинейное движение по направлению к центру Солнца) скорость v_4 максимальна и равна

$$v_4^{макс} = (V_к^2 + 2v_к^2)^{1/2} \approx 31{,}8 \text{ км/с}.$$

Ракета упадет в передней точке Солнца. При $x = r$ (r — радиус Солнца) ракета упадет в задней точке Солнца, двигаясь по касательной к его поверхности. В этом случае скорость минимальна и равна

$$v_4^{мин} \approx \left[V_к^2 \left(1 - \sqrt{\frac{2r}{R+r}}\right)^2 + 2v_к^2\right]^{1/2} \approx [V_к^2 (1 - \sqrt{2\alpha})^2 + 2v_к^2]^{1/2} \approx 29{,}2 \text{ км/с},$$

где $\alpha = 4{,}65 \cdot 10^{-3}$ рад — средний угловой радиус Солнца.

ЗАДАЧИ

1. Искусственный спутник Земли вращается по круговой орбите радиуса R с периодом T_1. В некоторый момент на очень короткое время был включен реактивный двигатель, увеличивший скорость спутника в α раз, и спутник стал вращаться по эллиптической орбите. Двигатель сообщал ускорение спутнику все время в направлении движения. Определить максимальное расстояние спутника от центра Земли, которого он достигнет после выключения двигателя. Найти также период T_2 обращения спутника по новой (эллиптической) орбите.

Решение. Обозначим $E_к$ полную энергию спутника при движении по круговой орбите. Согласно (58.3) $E_к = -K$, $U = -2K$. После того как отработал двигатель, скорость спутника возросла в α раз, а кинетическая энергия K — в α^2 раз. Потенциальная энергия не изменилась, так как за время работы двигателя спутник переместился пренебрежимо мало. Таким образом, полная энергия спутника на эллиптической орбите будет

$$E_{эл} = \alpha^2 K + U = (\alpha^2 - 2)\,K = (2 - \alpha^2)\,E_к.$$

Большие оси эллиптических орбит обратно пропорциональны полным энергиям (см. формулу (58.2)). Поэтому

$$\frac{a}{R} = \frac{1}{2-\alpha^2}, \quad a = \frac{R}{2-\alpha^2}.$$

Орбита будет эллиптической, если $\alpha^2 \leqslant 2$. Максимальное расстояние спутника от центра Земли (в апогее)

$$R_{макс} = 2a - R = \frac{\alpha^2 R}{2-\alpha^2}.$$

Период обращения T_2 найдется из третьего закона Кеплера и равен

$$T_2 = \frac{T_1}{(2-\alpha^2)^{3/2}}.$$

2. Найти такой радиус R круговой орбиты спутника Земли, движущегося в направлении ее вращения в плоскости земного экватора, чтобы он все время оставался неподвижным относительно Земли. (Такой спутник называется *стационарным*).

Ответ. $R = \left(\dfrac{g}{\omega^2 R_0}\right)^{1/3} R_0 \approx 6{,}60 R_0$. Здесь R_0 — экваториальный радиус Земли, $\omega^2 R_0$ — центростремительное ускорение на экваторе, обусловленное осевым вращением Земли, g — ускорение свободного падения. На экваторе $\omega^2 R_0/g = 1/288$.

3. Силы приливного трения, вызываемые лунными приливами, замедляют осевое вращение Земли. Этот процесс будет продолжаться до тех пор, пока не сделаются равными угловые скорости осевого вращения Земли и орбитального движения Луны вокруг Земли. Определить общую угловую скорость ω обоих вращений, продолжительность земных суток T и радиус лунной орбиты a после того, как это произойдет. В настоящее время угловая скорость осевого вращения Земли равна $\omega_З = 7{,}29 \cdot 10^{-5}$ рад/с, момент количества движения Земли относительно своей оси $L_З = 5{,}91 \cdot 10^{40}$ г·см²/с, момент инерции Земли относительно той же оси $I_З = 8{,}11 \cdot 10^{44}$ г·см², радиус лунной орбиты $a_0 = 3{,}84 \cdot 10^{10}$ см, период обращения Луны вокруг Земли (относительно звезд) $T_Л = 27{,}3$ сут, масса Луны $m = 7{,}35 \cdot 10^{25}$ г. Для упрощения расчета считать, что земная ось перпендикулярна к плоскости лунной орбиты.

Решение. Используя приведенные данные, находим: момент инерции Луны относительно оси вращения Земли $I_Л = ma_0^2 = 1{,}08 \cdot 10^{47}$ г·см² (моментом инерции Луны относительно ее собственной оси пренебрегаем), угловая скорость орбитального вращения Луны вокруг Земли $\omega_Л = 2{,}67 \cdot 10^{-6}$ рад/с, момент количества движения Луны относительно Земли $L_Л = I_Л \omega_Л = 28{,}9 \cdot 10^{40}$ г·см²/с, полный момент количества движения системы Земля — Луна $L = L_З + L_Л = 34{,}8 \cdot 10^{40}$ г·см²/с. По закону сохранения момента количества движения $(I_З + ma^2)\,\omega = L$, или, пренебрегая $I_З$, $ma^2\omega = L$. По третьему закону Кеплера $a^3\omega^2 = a_0^3\omega_Л^2$. Из этих двух уравнений можно найти неизвестные a и ω. В указанном приближении

$$a = \frac{L^2}{m^2 a_0^4 \omega_Л^2}\, a_0 = \left(\frac{L}{L_Л}\right)^2 a_0 = 1{,}45\ a_0 = 5{,}58 \cdot 10^{10}\ \text{см},$$

$$\omega/\omega_Л = (a_0/a)^{3/2} = 0{,}573, \quad T = 27{,}3/0{,}573 = 47{,}7\ \text{сут}.$$

4. Космический корабль подходит к Луне по параболической траектории, почти касающейся поверхности Луны. Чтобы перейти на стелящуюся круговую орбиту, в момент наибольшего сближения включают тормозной двигатель, выбрасывающий газы со скоростью $v = 4$ км/с относительно корабля в направлении его движения. Какую часть общей массы системы будет составлять горючее, использованное для торможения корабля? Средний радиус Луны $R = 1738$ км, ускорение свободного падения на поверхность Луны $g = 162$ см/с^2.

Ответ. $\frac{m_0 - m}{m_0} = (\sqrt{2} - 1)\frac{\sqrt{gR}}{v} \approx 0,17$.

5. Искусственный спутник движется вокруг Земли в разреженной атмосфере по круговой (или почти круговой) орбите. Как влияет сопротивление среды на скорость движения спутника и его момент количества движения относительно центра Земли?

Решение. Согласно (58.3) при круговом движении $E = -K$. Трение уменьшает полную энергию E. Поэтому кинетическая энергия K возрастает (спутник приближается к Земле).

6. Космический корабль без начальной скорости свободно падает на Землю из удаленной точки. В каком месте следует повернуть направление скорости корабля на $90°$ (без изменения ее величины), чтобы он стал двигаться вокруг Земли по круговой траектории?

Ответ. Посередине между центром Земли и начальным положением корабля.

7. Космический корабль движется вокруг Земли по эллиптической орбите. В какой точке орбиты следует изменить направление скорости корабля (без изменения ее величины), чтобы корабль стал двигаться по круговой орбите?

Решение. Так как энергия корабля зависит только от длины $2a$ большой оси его орбиты, то переход на круговую орбиту произойдет на расстоянии a, т. е. в точке пересечения эллипса с его малой осью. Направление скорости корабля надо повернуть на такой угол, чтобы оно оказалось перпендикулярным к линии, соединяющей корабль с центром Земли.

8. Космический корабль движется вокруг Земли по эллиптической орбите. В точке пересечения эллипса с его малой осью включается двигатель. Как надо изменить скорость корабля в этой точке, чтобы он перешел на параболическую орбиту?

Ответ. Увеличить в $\sqrt{2}$ раз.

9. Какую перегрузку испытывает при старте космонавт в космическом корабле на самом начальном участке полета, когда корабль вместе с ракетой-носителем поднимается вертикально вверх с постоянным ускорением и за время $\tau = 4$ с набирает скорость $v = \alpha v_к$, где $v_к$ — первая космическая скорость, а $\alpha = 0,03$? (Перегрузкой называется отношение $n = (P - P_0)/P_0$, где P_0 — вес космонавта на Земле, а P — «вес», который показали бы пружинные весы при взвешивании космонавта в корабле.)

Решение. Примем за положительное направление вверх. «Вес» космонавта в корабле будет

$$P = P_0 + m\frac{dv}{dt}.$$

Считая на начальном участке величину P постоянной, находим скорость корабля через время τ:

$$v \equiv \alpha v_к = \frac{P - P_0}{m}\tau.$$

Отсюда

$$\frac{P - P_0}{P_0} = \frac{\alpha v_к}{g\tau} = \frac{\alpha}{\tau}\sqrt{\frac{R}{g}} = \theta.$$