§ 62. Вывод законов движения планет из закона всемирного тяготения Ньютона

В предыдущих параграфах три закона Кеплера были приняты за исходные. Пользуясь ими, мы пришли к закону всемирного тяготения Ньютона. Теперь поступим наоборот. Примем, что на планету со стороны Солнца действует сила тяготения, подчиняющаяся закону Ньютона. Найдем движение планеты под действием такой силы. Массу Солнца будем считать бесконечно большой по сравнению с массой планеты. К такому случаю сводится и общий случай, когда это условие не выполняется (см. § 59). Возьмем полярную систему координат (r, φ), полюс которой поместим в центре Солнца. Скорость планеты v можно разложить на радиальную скорость $v_r = \dot{r}$ и перпендикулярную к ней азимутальную скорость $v_\varphi = r\dot{\varphi}$. Очевидно, $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2$. Законы сохранения энергии и момента импульса планеты запишем в виде

$$\frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - G\frac{M}{r} = \varepsilon, \tag{62.1}$$

$$\frac{1}{2}r^2\dot{\varphi} = \sigma, \tag{62.2}$$

где M — масса Солнца, ε — полная энергия планеты, приходящаяся на единицу ее массы, σ — секториальная скорость, остающаяся постоянной во время движения. Для нахождения уравнения траектории планеты исключим время. Считая r функцией φ, имеем $\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi}\dot{\varphi}$. Подставляя это значение в уравнение (62.1) и исключая $\dot{\varphi}$ с помощью уравнения (62.2), получим

$$\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \frac{1}{r^2} = \frac{1}{2\sigma^2}\left(\varepsilon + \frac{GM}{r}\right). \tag{62.3}$$

Введем новую переменную $\rho = -\frac{1}{r} + \frac{1}{p}$, где p — постоянная, значение которой будет установлено ниже. Тогда уравнение (62.3) перейдет в

$$\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 + \left(\rho - \frac{1}{p}\right)^2 = \frac{\varepsilon}{2\sigma^2} + \frac{GM}{2\sigma^2}\left(-\rho + \frac{1}{p}\right).$$

Подберем постоянную p так, чтобы в этом уравнении исчезли члены, содержащие первые степени ρ. Для этого надо положить

$$p = \frac{4\sigma^2}{GM}. \tag{62.4}$$

При таком выборе постоянной p получим

$$\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 = \frac{\varepsilon}{2\sigma^2} + \frac{1}{p^2} - \rho^2.$$

Поскольку слева стоит неотрицательная величина, постоянная $\frac{1}{p^2} + \frac{\varepsilon}{2\sigma^2}$ также неотрицательна, и ее можно обозначить посредством A^2:

$$A^2 = \frac{1}{p^2} + \frac{\varepsilon}{2\sigma^2}. \tag{62.5}$$

В результате получим

$$\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 = A^2 - \rho^2. \tag{62.6}$$

Очевидно $A^2 \geqslant \rho^2$, а потому можно положить $\rho/A = \cos\Theta$, где Θ — новая неизвестная. Тогда

$$A^2-\rho^2=A^2\sin^2\Theta,\qquad \frac{d\rho}{d\varphi}=-A\sin\Theta\,\frac{d\Theta}{d\varphi}.$$

Подставляя в (62.6) и сокращая на $A\sin\Theta$, получим $\frac{d\Theta}{d\varphi}=\pm 1$, откуда $\Theta=$ $=\pm\varphi+\varphi_0$. Следовательно, $\rho=A\cos(\pm\varphi+\varphi_0)=A\cos(\varphi\pm\varphi_0)$. В последнем выражении двойной знак перед φ_0 сохранять не имеет смысла, поскольку φ_0 есть постоянная интегрирования. Возвращаясь к прежним обозначениям, получим

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{p}\left[1-e\cos(\varphi+\varphi_0)\right],\tag{62.7}$$

где

$$e=pA=\sqrt{1+\frac{\varepsilon p^2}{2\sigma^2}}=\sqrt{1+\frac{8\varepsilon\sigma^2}{G^2M^2}}.\tag{62.8}$$

Без ограничения общности можно положить $\varphi_0=0$. Это означает просто, что отсчет углов φ ведется от такого положения радиуса-вектора планеты, когда его длина равна $p/(1-e)$. При таком отсчете уравнение (62.7) принимает вид

$$r=\frac{p}{1-e\cos\varphi}.\tag{62.9}$$

Это — уравнение конического сечения с эксцентриситетом e и параметром p. Если $\varepsilon<0$, то $e<1$ (эллипс); если $\varepsilon=0$, то $e=1$ (парабола); если $\varepsilon>0$, то $e>1$ (гипербола). Мы пришли к результатам, полученным в § 57 иным путем. Нетрудно теперь вычислить остальные параметры орбиты и в случае эллиптического движения получить третий закон Кеплера. Однако все эти вычисления уже были проделаны ранее, и в новых вычислениях нет необходимости.