Для вычисления интеграла введем прямоугольную систему координат. Ось Z направим вдоль оси фигуры гироскопа, а ось X расположим в плоскости, в которой лежат векторы $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\Omega}$ (см. рис. 185). В этой системе координат

$$M = -2j\omega\Omega_x \int x^2\,dm - 2j\omega\Omega_z \int zx\,dm + 2i\omega\Omega_x \int xy\,dm + 2i\omega\Omega_z \int yz\,dm.$$

Все входящие сюда интегралы, за исключением первого, обращаются в нуль из-за осесимметричного распределения масс. Первый же член может быть записан в виде

$$M = -j\omega\Omega_x \int (x^2+y^2)\,dm = -jI_\perp \omega\Omega \sin\vartheta,$$

где ϑ — угол между векторами $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\Omega}$, а $I_\perp$ — соответствующий момент инерции гироскопа. В векторной форме

$$\boldsymbol{M} = I_\perp [\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\omega}]. \tag{64.26}$$

Векторное произведение $[\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\omega}]$ есть вектор скорости, с которой при регулярной прецессии движется конец вектора $\boldsymbol{\omega}$, неизменно связанный с осью фигуры гироскопа. Таким образом, вершина гироскопа перемещается не в направлении приложенной силы, а в перпендикулярном к ней направлении — в направлении момента $\boldsymbol{M}$. Это — то, что кажется более всего удивительным в движении гироскопа. Если перейти к системе отсчета, вращающейся с угловой скоростью прецессии $\boldsymbol{\Omega}$, то можно сказать, что в этой системе момент внешних сил должен уравновешивать момент сил инерции Кориолиса.

§ 65. Уравнение относительного движения материальной точки в гравитационном поле Земли с учетом ее вращения

1. Применим уравнение относительного движения (64.15) к движению тел относительно Земли. Движущуюся систему отсчета S свяжем с вращающейся Землей. Речь идет о вращении Земли относительно инерциальной системы отсчета, например системы Коперника. Начало координат O поместим в центре Земли. Таким образом, под $\boldsymbol{v}_0$ следует понимать скорость, а под $\dot{\boldsymbol{v}}_0$ — ускорение центра Земли. Земля вращается практически равномерно, а потому последний член в уравнении (64.15) выпадает. Далее, так как речь будет идти только об относительном движении, условимся опускать в уравнении (64.15) индекс «отн», т. е. будем полагать $\boldsymbol{v} \equiv \boldsymbol{v}_{\text{отн}}$, $\boldsymbol{a} \equiv \boldsymbol{a}_{\text{отн}}$. Внешнюю силу представим в виде суммы трех сил $\boldsymbol{F}_З + \boldsymbol{F}_0 + \boldsymbol{F}$, где $\boldsymbol{F}_З$ — сила гравитационного притяжения Земли, $\boldsymbol{F}_0$ — равнодействующая сил гравитационного притяжения Солнца, Луны, планет, звезд и прочих небесных тел, $\boldsymbol{F}$ — геометрическая сумма всех остальных сил, действующих на материальную точку. Сила $\boldsymbol{F}$ слагается, например, из силы сопротивления воздуха, силы трения, силы натяжения нити и пр. В этих обозначениях уравнение (64.15) примет вид

$$m\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{F}_З + m\omega^2\boldsymbol{r}_\perp) + 2m[\boldsymbol{v}\boldsymbol{\omega}] + \boldsymbol{F} + (\boldsymbol{F}_0 - m\dot{\boldsymbol{v}}_0). \tag{65.1}$$

2. Используем далее фундаментальный физический закон, согласно которому *все тела в одном и том же поле тяготения падают* *с одинаковым ускорением*. Этот закон называется *обобщенным законом Галилея,* так как Галилей был первым, кто установил его справедливость для тел, свободно падающих в поле тяжести Земли. Из этого закона следует, что *сила, действующая на тело в гравитационном поле, не зависит от состава тела, а только от его массы. Она строго пропорциональна массе тела.* В этом отношении силы тяготения ведут себя так же, как и силы инерции. Последние, очевидно, также строго пропорциональны массам тел.

3. Основной вклад в силу $\boldsymbol{F}_0$ вносят гравитационные поля Солнца и Луны. Эти поля, в особенности гравитационное поле Луны, неоднородны. Они убывают обратно пропорционально квадратам расстояний от Солнца и Луны. Однако размеры Земли очень малы по сравнению с этими расстояниями. При рассмотрении движений вблизи земной поверхности изменениями гравитационных полей Солнца, Луны и всех прочих внешних гравитационных полей на расстояниях порядка диаметра земного шара можно в первом приближении пренебречь, т. е. считать внешнее гравитационное поле в окрестности Земли *однородным*. Однородное гравитационное поле сообщает одно и то же ускорение всем телам, независимо от того, в каких точках поля эти тела находятся. Значит, в принятом приближении внешнее гравитационное поле сообщает рассматриваемой материальной точке такое же ускорение, что и центру Земли, т. е. $\dot{\boldsymbol{v}}_0$. Поэтому $\boldsymbol{F}_0 - m\dot{\boldsymbol{v}}_0 = 0$. Таким образом, *силы гравитационного притяжения Солнца, Луны и всех остальных небесных тел выпадают из уравнений относительного движения* (65.1). *Они полностью компенсируются поступательными силами инерции, возникающими из-за ускорения, сообщаемого Земле этими полями.* Этот замечательный результат, как мы видим, является следствием обобщенного закона Галилея.

4. Сила $\boldsymbol{F}_З$ гравитационного притяжения Земли, а с ней и векторная сумма $\boldsymbol{F}_З + m\omega^2\boldsymbol{r}_\perp$, вследствие того же закона Галилея, пропорциональны массе материальной точки m. Эта сумма не зависит от относительного движения точки и характеризует только гравитационное поле Земли и ее вращение. Целесообразно рассматривать эту сумму как единую величину. Для нее мы введем обозначение

$$\boldsymbol{F}_З + m\omega^2\boldsymbol{r}_\perp = m\boldsymbol{g}. \tag{65.2}$$

Тогда уравнение относительного движения примет вид

$$m\boldsymbol{a} = m\boldsymbol{g} + 2m[\boldsymbol{v}\boldsymbol{\omega}] + \boldsymbol{F}. \tag{65.3}$$

Величина $\boldsymbol{g}$ одна и та же для всех тел — она может меняться только при переходе из одной точки пространства в другую.

Для установления физического смысла вектора $\boldsymbol{g}$ допустим, что внешних сил нет ($\boldsymbol{F} = 0$), а скорость $\boldsymbol{v}$ материальной точки равна нулю. Тогда из формулы (65.3) следует $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{g}$. Таким образом, *вектор $\boldsymbol{g}$ есть ускорение свободно падающего тела относительно Земли при условии, что его скорость в рассматриваемый момент равна нулю.* Оговорка относительно скорости тела необходима, так как при наличии скорости $\boldsymbol{v}$ появляется дополнительное ускорение из-за кориолисовой силы. Мы видим, что ускорение свободного падения состоит из двух слагаемых

$$\boldsymbol{g}=\boldsymbol{g}_{\text{абс}}+\omega^2\boldsymbol{r}_{\perp}. \qquad (65.4)$$

Первое из них, $\boldsymbol{g}_{\text{абс}}=\frac{1}{m}\boldsymbol{F}_З$ есть ускорение, вызванное силой гравитационного притяжения Земли. Такое ускорение мы получили бы, если бы измеряли ускорение свободного падения относительно неподвижной системы отсчета при условии, что, помимо земного гравитационного поля, никаких других полей нет. Второе слагаемое $\omega^2 r_{\perp}$ есть ускорение, сообщаемое центробежной силой инерции и связанное с вращением Земли.

§ 66. Вес и взвешивание тел

1. *Весом тела называется приложенная к нему сила $\boldsymbol{P}$, равная и противоположно направленная силе, с которой это тело действует на подставку, на которой оно лежит, или тянет за подвес, к которому оно подвешено. При этом предполагается, что тело, подставка и подвес покоятся в той системе отсчета, в которой производится взвешивание. Когда говорят о весе тела, обычно предполагают, что тело, подставка и подвес покоятся относительно Земли.* Допустим ради определенности, что тело лежит на подставке. Оно действует на подставку с силой $\boldsymbol{P}$, подставка действует на тело с противоположно направленной силой $\boldsymbol{F}$. По смыслу $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{F}$ суть силы взаимодействия подставки и тела. Они удовлетворяют третьему закону Ньютона: $\boldsymbol{F}=-\boldsymbol{P}$. Предполагая, что тело на подставке покоится, подставим в формулу (65.3) $\boldsymbol{v}=0$, $\boldsymbol{a}=0$, $\boldsymbol{F}=-\boldsymbol{P}$. Тогда для $\boldsymbol{P}$ найдем

$$\boldsymbol{P}=m\boldsymbol{g}. \qquad (66.1)$$

Учитывая (65.4), видим, что $\boldsymbol{P}$ состоит из двух слагаемых:

$$\boldsymbol{P}=m\boldsymbol{g}_{\text{абс}}+m\omega^2\boldsymbol{r}_{\perp}=\boldsymbol{F}_З+m\omega^2\boldsymbol{r}_{\perp}. \qquad (66.2)$$

Значит, *вес есть геометрическая сумма силы гравитационного притяжения Земли $\boldsymbol{F}_З$ и центробежной силы инерции $m\omega^2\boldsymbol{r}_{\perp}$.*

Если тело подвешено на нити, то рассуждения остаются теми же самыми. В этом случае направление нити определяет направление силы $\boldsymbol{P}$, а следовательно, и ускорение свободного падения $\boldsymbol{g}$. Оно называется *направлением отвеса* или *отвесным направлением*.

2. Вектор $\boldsymbol{g}_{\text{абс}}$ характеризует гравитационное поле Земли. В каждой точке пространства он определяется только размерами