3. Пароход движется на восток вдоль параллели с географической широтой $\vartheta = 60°$. Скорость парохода $v = 10$ м/с. Определить вес тела P на пароходе, если взвешивание производится на пружинных весах. Вес того же тела, неподвижного относительно Земли, в той же точке земной поверхности равен P_0.

Ответ. $P = P_0\left[1 - \frac{2\omega v \cos\vartheta + v^2/R}{g}\right] \approx P_0\left(1 - 2\frac{\omega v}{g}\cos\vartheta\right) \approx P_0(1 - 7{,}5\cdot 10^{-5})$ (R — радиус Земли).

4. Самолет летит с постоянной скоростью, описывая окружность на постоянной высоте. Какое направление будет указывать нить отвеса, подвешенного в салоне самолета? Найти период малых колебаний математического маятника внутри самолета, если длина маятника равна l, корпус самолета наклонен к направлению горизонта под углом α.

Ответ. Нить отвеса установится перпендикулярно к полу салона самолета. $T = 2\pi\sqrt{\frac{l\cos\alpha}{g}}$.

5. Самолет летает на постоянной высоте по окружности радиуса $R = 25$ км с постоянной скоростью $v = 250$ м/с. В кабине самолета установлены пружинные и маятниковые часы. Какое время полета t' покажут маятниковые часы, если это время, измеренное пружинными часами, равно $t = 1$ ч? Часы считать идеальными. Силу Кориолиса, ввиду ее малости, не учитывать.

Ответ. $t' = t\left(1 + \frac{v^4}{4R^2g^2}\right) = 1$ ч 56 с.

§ 67. Отклонение падающих тел от направления отвеса

1. Пусть тело свободно падает в поле тяжести Земли. В этом случае $\boldsymbol{F} = 0$, и уравнение (65.3) переходит в

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{g} + 2[\boldsymbol{v}\boldsymbol{\omega}]. \tag{67.1}$$

Это уравнение описывает *свободное падение тел с учетом вращения Земли*. Влияние вращения Земли сводится к действию центробежной и кориолисовой сил. Центробежная сила учитывается автоматически, так как она включена в вес тела $m\boldsymbol{g}$ как его составная часть. Наличие этой силы не меняет вид уравнения. Только направление к центру Земли заменяется направлением отвеса. В остальном центробежная сила не приводит к качественно новым явлениям. Более существенно влияет на характер движения кориолисова сила. *При падении тел без начальной скорости кориолисова сила проявляется в отклонении свободно падающих тел к востоку и экватору от направления отвеса.* Теория этих явлений сводится к решению дифференциального уравнения (67.1). Если вектор $\boldsymbol{g}$ постоянен, то векторное уравнение (67.1) эквивалентно системе трех линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. Точное решение такой системы получить нетрудно с помощью общеизвестных методов, излагаемых в теории дифференциальных уравнений. Однако мы по этому пути не пойдем. Он громоздок, а главное, получение точных решений вряд ли оправдано, когда в уравнении (67.1) пренебрегается зависимостью $\boldsymbol{g}$ от координат. Последнее допустимо лишь тогда, когда движение рассматривается в сравнительно небольшой области пространства, во всех точках которой вектор $\boldsymbol{g}$ практически один и тот же. А в этих случаях прекрасно работает приближенный *метод последовательных приближений,* дающий вполне достаточную точность. Вычисления по этому методу просты и лучше выявляют сущность явления. Им мы и воспользуемся.

2. В уравнении (67.1) член $2[\boldsymbol{v}\boldsymbol{\omega}]$ мал по сравнению с $\boldsymbol{g}$. Его можно рассматривать как малую поправку и в *нулевом приближении* отбросить. Тогда получатся законы свободного падения без учета вращения Земли:

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{g}, \qquad \boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{g}t, \tag{67.2}$$

где $\boldsymbol{v}_0$ — начальная скорость тела.

Пользуясь нулевым приближением, можно учесть и влияние кориолисовой силы. С этой целью в уравнение (67.1) мы подставим значение $\boldsymbol{v}$ из нулевого приближения и таким путем получим ускорение $\boldsymbol{a}$ в *первом приближении*:

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{g}+2[\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{\omega}]+2t[\boldsymbol{g}\boldsymbol{\omega}]. \tag{67.3}$$

Интегрирование этого уравнения дает скорость $\boldsymbol{v}$ в том же приближении:

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{g}t+2t[\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{\omega}]+t^2[\boldsymbol{g}\boldsymbol{\omega}]. \tag{67.4}$$

С помощью этого выражения снова уточняем выражение для кориолисовой силы. Именно, подставляя его в уравнение (67.1), получаем выражение для ускорения $\boldsymbol{a}$ во *втором приближении*:

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{g}+2[\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{\omega}]+2t[\boldsymbol{g}\boldsymbol{\omega}]+4t[[\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{\omega}]\boldsymbol{\omega}]+2t^2[[\boldsymbol{g}\boldsymbol{\omega}]\boldsymbol{\omega}], \tag{67.5}$$

а после интегрирования по t — для скорости $\boldsymbol{v}$ в том же приближении:

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{g}t+2t[\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{\omega}]+t^2[\boldsymbol{g}\boldsymbol{\omega}]+2t^2[[\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{\omega}]\boldsymbol{\omega}]+\frac{2}{3}t^3[[\boldsymbol{g}\boldsymbol{\omega}]\boldsymbol{\omega}]. \tag{67.6}$$

Описанный процесс последовательных приближений можно было бы продолжить неограниченно. Оборвем его на втором приближении. Интегрируя (67.6) по t, находим радиус-вектор материальной точки в любой момент времени во втором приближении:

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{v}_0t+\frac{1}{2}\boldsymbol{g}t^2+t^2[\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{\omega}]+\frac{t^3}{3}[\boldsymbol{g}\boldsymbol{\omega}]+\frac{2}{3}t^3[[\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{\omega}]\boldsymbol{\omega}]+\frac{t^4}{6}[[\boldsymbol{g}\boldsymbol{\omega}]\boldsymbol{\omega}]. \tag{67.7}$$

В частности, если тело падает без начальной скорости, то для его смещения из начального положения $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0$ получим

$$\boldsymbol{s}=\frac{1}{2}\boldsymbol{g}t^2+\frac{t^3}{3}[\boldsymbol{g}\boldsymbol{\omega}]+\frac{t^4}{6}[[\boldsymbol{g}\boldsymbol{\omega}]\boldsymbol{\omega}]. \tag{67.8}$$

3. Чтобы проанализировать полученный результат, введем прямоугольную систему координат, начало которой поместим в точку A, из которой начинает падать рассматриваемое тело (рис. 188). Ось X направим по параллели на восток, ось Y — по меридиану к экватору, ось Z — по направлению отвеса вниз, т. е. вдоль вектора $\boldsymbol{g}$. Спроектируем затем выражение (67.8) на координатные оси. Векторное произведение $[\boldsymbol{g\omega}]$ направлено на восток, двойное векторное произведение $[[\boldsymbol{g\omega}]\boldsymbol{\omega}]$ есть вектор, направленный от оси вращения Земли и перпендикулярный к ней. Поэтому переходя к проекциям, получим

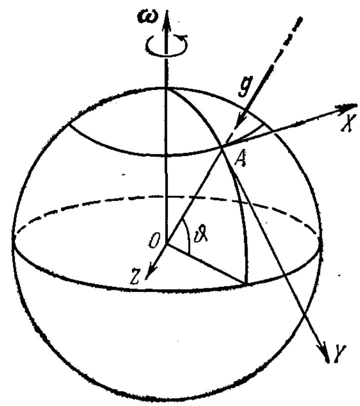

Рис. 188.

$$z = \frac{1}{2} gt^2 - \frac{1}{6} \omega^2 t^4 g \cos^2 \vartheta, \qquad (67.9)$$

$$x \equiv s_{\text{вост}} = \frac{1}{3} \omega t^3 g \cos \vartheta, \qquad (67.10)$$

$$y \equiv s_{\text{экв}} = \frac{1}{12} \omega^2 t^4 g \sin 2\vartheta, \qquad (67.11)$$

где ϑ — угол географической широты рассматриваемого места. Второе слагаемое в формуле (67.9) есть только малая поправка к нулевому приближению и не меняет качественно характер явления. Это слагаемое можно отбросить и находить время падения по формуле нулевого приближения

$$t = \sqrt{\frac{2z}{g}}. \qquad (67.12)$$

Иное дело, когда речь идет о формулах (67.10) и (67.11). Здесь в нулевом приближении $x = y = 0$. Вращение Земли сказывается в появлении двух новых эффектов: отклонении свободно падающих тел к востоку и к экватору от направления отвеса (а не от направления к центру Земли, как это иногда ошибочно утверждают). Выражение для восточного отклонения можно записать в виде

$$s_{\text{вост}} = \frac{2}{3} \omega t h \cos \vartheta = \frac{4\pi}{3} \frac{t}{T} h \cos \vartheta, \qquad (67.13)$$

где h — высота падения, а $T = 2\pi/\omega$ — период суточного вращения Земли.

Отклонение $s_{\text{вост}}$ очень мало, так как в формулу (67.13) входит малый множитель t/T. Так, при $h = 100$ м $t = 4{,}5$ с, и для широты Москвы ($\vartheta = 56°$) получаем $s_{\text{вост}} = 1{,}2$ см. При падении с высоты $h = 500$ м получилось бы $s_{\text{вост}} = 13{,}8$ см. Несмотря на малость эффекта, его с уверенностью удалось наблюдать в опытах с падением тел в глубоких шахтах уже в середине XIX века.

Экваториальное отклонение связано с восточным соотношением:

$$s_{\text{экв}} = \frac{\omega t \sin\vartheta}{2} s_{\text{вост}}. \tag{67.14}$$

Из-за наличия малого множителя $\omega t = 2\pi t/T$ отклонение к экватору очень мало и по этой причине недоступно наблюдению.

ЗАДАЧИ

1. Из ружья произведен выстрел строго вверх (т. е. параллельно линии отвеса). Начальная скорость пули $v_0 = 100$ м/с, географическая широта места $\vartheta = 60°$. Учитывая осевое вращение Земли, определить приближенно, насколько восточнее или западнее от места выстрела упадет пуля. Сопротивление воздуха не принимать во внимание.

Ответ. Пуля отклонится к западу на расстояние

$$x_{\text{зап}} = \frac{4}{3} \frac{v_0^3 \omega}{g^2} \cos\vartheta \approx 51 \text{ см}.$$

Результат может показаться неожиданным. При движении вверх кориолисова сила отклоняет брошенное тело к западу от направления отвеса, при движении вниз она отклоняет его к востоку. На первый взгляд кажется, что отклонение к западу должно компенсироваться последующим отклонением к востоку. На самом деле это не так. Когда тело движется вверх, его боковая начальная скорость равна нулю. В наивысшую точку тело приходит, однако, с западной составляющей скорости, которую оно приобретает под действием кориолисовой силы. Поэтому обратное падение тела начинается с начальной скоростью, направленной на запад. При этом тело не только смещается к востоку под действием изменившей направление кориолисовой силы, но и продолжает по инерции двигаться на запад. В результате отклонение к западу оказывается больше, чем отклонение к востоку.

2. Под каким углом α к вертикали надо произвести выстрел вверх, чтобы пуля упала обратно в точку, из которой был произведен выстрел? Использовать данные предыдущей задачи.

Ответ. Ствол ружья надо наклонить к востоку под углом

$$\alpha = \frac{2}{3} \frac{v_0 \omega}{g} \cos\vartheta \approx 2{,}45 \cdot 10^{-4} \text{ рад} \approx 0{,}85' \approx 51''.$$

3. Из орудия, установленного в точке земной поверхности с географической широтой $\vartheta = 30°$, производится выстрел в направлении на восток. Начальная скорость снаряда $v_0 = 500$ м/с, угол вылета снаряда (т. е. угол наклона касательной в начальной точке траектории к плоскости горизонта) $\alpha = 60°$. Пренебрегая сопротивлением воздуха и учитывая вращение Земли, определить приближенно отклонение y точки падения снаряда от плоскости стрельбы. Какое это будет отклонение: к югу или к северу? (Плоскостью стрельбы называется плоскость, проходящая через направление касательной в начальной точке траектории и направление отвеса в той же точке.)

Ответ. К югу, $y = \dfrac{4\omega v_0^3 \sin\vartheta \cos\alpha \sin^2\alpha}{g^2} \approx 71$ м.