§ 68. Маятник Фуко

1. Опыты по отклонению к востоку свободно падающих тел в принципе могли бы служить экспериментальным доказательством неинерциальности земной системы отсчета и приближенной инерциальности системы Коперника. Однако постановка таких опытов затруднительна, а их точность невелика. Для этой цели более подходящим является *маятник Фуко*. Так называется массивный шар, подвешенный на достаточно длинной нити и совершающий малые колебания около положения равновесия. Отклоним маятник из положения равновесия, а затем предоставим его самому себе. Если бы Земля была инерциальной системой отсчета, то на маятник действовали бы только «настоящие силы»: сила веса mg и сила натяжения нити $\boldsymbol{F}$ (силами трения и сопротивления воздуха пренебрегаем). Обе эти силы лежат в вертикальной плоскости. Поэтому если маятнику не сообщен толчок в боковом направлении, то он все время будет колебаться в одной и той же вертикальной плоскости, неподвижной относительно Земли. Опыты показали, что это не так — плоскость качаний маятника в земной системе отсчета медленно поворачивается вокруг вертикали рассматриваемого места и притом в том же направлении, в каком совершают суточное вращение Солнце и звезды на небесной сфере. Это доказывает, что земная система отсчета не является инерциальной.

Чтобы объяснить вращение плоскости качаний маятника, предположим, что Земля равномерно вращается относительно неизвестной нам инерциальной системы отсчета с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$. В земной системе отсчета к «настоящим силам», действующим на маятник, добавятся еще силы инерции: центробежная и кориолисова. Движение маятника будет описываться уравнением (65.3). Кориолисова сила $2m[\boldsymbol{v}\boldsymbol{\omega}]$ перпендикулярна к плоскости качаний маятника. Она-то и вызывает вращение этой плоскости.

2. Допустим сначала, что опыт произведен на полюсе Земли. Тогда в уравнении (65.3) вектор $\boldsymbol{\omega}$ будет направлен вдоль вертикали. Но результат легко предсказать, если рассмотреть качания маятника в инерциальной системе отсчета. В этой системе нет никаких сил инерции — действуют только сила веса mg и сила натяжения нити $\boldsymbol{F}$. Поэтому в инерциальной системе плоскость качаний маятника будет сохранять неизменное положение. Земля же будет вращаться относительно этой неподвижной плоскости с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$. Иными словами, плоскость качаний маятника будет вращаться относительно Земли с той же угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$, но в противоположном направлении. Разумеется, результат предсказания не может зависеть от способа рассмотрения (если только способ правильный). Поэтому к тому же результату мы пришли бы, если бы с самого начала рассматривали задачу в земной системе отсчета с помощью уравнения относительного движения (65.3). Это замечание позволяет легко разобраться в вопросе, как будет вести себя плоскость качаний маятника, если опыт произведен в любом месте земной поверхности (а не только на полюсе).

3. Допустим, что опыт произведен в точке земной поверхности с географической широтой ϑ. Разложим вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ на две составляющие: вертикальную $\boldsymbol{\omega}_в$ и горизонтальную $\boldsymbol{\omega}_г$: $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_в + \boldsymbol{\omega}_г$. Горизонтальную составляющую в свою очередь разложим на две составляющие: $\boldsymbol{\omega}_\parallel$ и $\boldsymbol{\omega}_\perp$, из которых $\boldsymbol{\omega}_\parallel$ лежит в плоскости качаний маятника, а $\boldsymbol{\omega}_\perp$ к ней перпендикулярна (рис. 189). Тогда уравнение (65.3) представится в виде

$$m\boldsymbol{a} = m\boldsymbol{g} + 2m[\boldsymbol{v}\boldsymbol{\omega}_в] + 2m[\boldsymbol{v}\boldsymbol{\omega}_\perp] + 2m[\boldsymbol{v}\boldsymbol{\omega}_\parallel] + \boldsymbol{F}.$$

Составляющая силы Кориолиса $2m[\boldsymbol{v}\boldsymbol{\omega}_\perp]$ направлена вдоль нити маятника. Она слегка меняет натяжение нити, а с ним и период колебаний маятника. На положение плоскости качаний маятника эта составляющая не оказывает влияния. В задаче о вращении плоскости качаний маятника ее можно отбросить. Вторая составляющая силы Кориолиса $2m[\boldsymbol{v}\boldsymbol{\omega}_в]$ в нашей задаче наиболее важна. Она перпендикулярна к плоскости качаний маятника и вызывает вращение этой плоскости. Третья составляющая $2m[\boldsymbol{v}\boldsymbol{\omega}_\parallel]$ тоже перпендикулярна к плоскости качаний маятника, а потому она также оказывает влияние на эту плоскость. Однако при малых колебаниях маятника эта составляющая мала в силу малости угла α. Кроме того, при колебаниях маятника она периодически меняет направление. Когда маятник движется от центра O вправо или влево, составляющая $2m[\boldsymbol{v}\boldsymbol{\omega}_\parallel]$ направлена за плоскость рисунка (рис. 189). Когда маятник из крайних положений приближается к центру O, она направлена противоположно, т. е. к читателю. Поэтому сила $2m[\boldsymbol{v}\boldsymbol{\omega}_\parallel]$ не приводит к систематическому вращению плоскости колебаний маятника, а вызывает лишь малые колебания ее относительно среднего положения. Эту силу можно также отбросить. В результате уравнение относительного движения примет вид

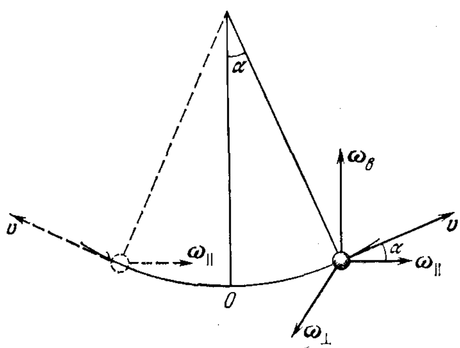

Рис. 189.

$$m\boldsymbol{a} = m\boldsymbol{g} + 2m[\boldsymbol{v}\boldsymbol{\omega}_в] + \boldsymbol{F}. \tag{68.1}$$

Из уравнения выпала горизонтальная составляющая угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$. Уравнение приняло такой же вид, как и на полюсе. Вся разница только в том, что вместо полной угловой скорости в него вошла ее вертикальная составляющая $\omega_в$. Значит, маятник будет вести себя так же, как и на полюсе. Но плоскость качаний его будет вращаться с меньшей угловой скоростью

$$\omega_в = \omega \sin \vartheta. \tag{68.2}$$

Полный оборот плоскость качаний маятника совершит за время

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega \sin \vartheta} = \frac{T}{\sin \vartheta}, \tag{68.3}$$

где T — период вращения Земли относительно инерциальной системы отсчета.

Реальный опыт впервые был произведен Фуко в Парижской обсерватории в 1850 году и повторен в 1851 году в Пантеоне. Маятник имел длину 67 метров и состоял из металлического шара массы $m = 28$ кг. Опыт показал, что относительно Земли плоскость качаний маятника вращается вокруг вертикали рассматриваемого места в соответствии с формулами (68.2) и (68.3), если только вращение самой Земли относить к системе Коперника. Это доказывает, что земная система отсчета не инерциальна, а система Коперника — инерциальна. Конечно, последнее заключение не может быть столь же категоричным, каким является первое. Лучше сказать, что опыт Фуко не противоречит предположению об инерциальности коперниковой системы отсчета.

4. Исследуем более детально форму траектории маятника Фуко при его колебаниях относительно земной системы отсчета. Как уже выяснено, можно отвлечься от горизонтальной составляющей угловой скорости ω и считать, что Земля вращается вокруг вертикали с угловой скоростью $\omega_в$. Иначе говоря, можно

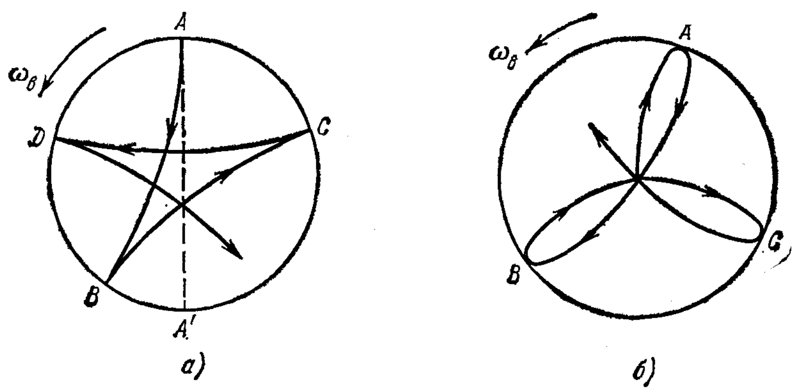

Рис. 190.

рассуждать так, как если бы опыт Фуко был произведен на полюсе, но Земля вращалась с меньшей угловой скоростью $\omega_в$. Пусть вектор угловой скорости $\omega_в$ направлен перпендикулярно к плоскости рисунка к читателю (рис. 190). Кориолисова сила $2m[\boldsymbol{v}\boldsymbol{\omega}_в]$, действующая на маятник при его колебаниях, перпендикулярна к его траектории и направлена вправо по ходу движения маятника.

Эта сила искривляет траекторию маятника. Допустим сначала, что маятник отклонен в крайнее положение A, а затем отпущен без начальной скорости. Если бы не было кориолисовой силы, то маятник пришел бы в диаметрально противоположную точку A'. Кориолисова сила отклонит маятник в сторону, и он придет в точку B, расположенную правее. В этой точке скорость маятника обратится в нуль, а затем изменит направление. Изменит направление и кориолисова сила. Она по-прежнему будет изгибать траекторию маятника вправо (так как наблюдатель также должен повернуться, чтобы все время смотреть в направлении движения маятника). Затем маятник будет последовательно приходить в новые точки поворота C, D, ... В результате получится сложная кривая с угловыми точками, изображенная схематически на рис. 190, *а*.

Несколько иной характер траектории получится в том случае, когда маятнику сообщен толчок из положения равновесия. Трактория по-прежнему будет изгибаться вправо. Но в крайние точки A, B, C, ... (рис. 190, *б*) маятник будет приходить с отличными от нуля азимутальными скоростями, которые он приобрел под действием кориолисовой силы, когда двигался из центра. В результате в местах поворота получатся не точки заострения, а плавные закругления, как это изображено на рисунке. Вследствие медленности вращения Земли наблюдатель не замечает искривления плоскости качания маятника. В обоих случаях ему кажется, что плоскость качаний маятника вращается вокруг вертикали с угловой скоростью $\omega_в = \omega \sin \vartheta$.

ЗАДАЧА

Один из маятников Фуко установлен в Ленинграде в Исаакиевском соборе. Длина маятника $l = 98$ м, линейная амплитуда колебаний шара маятника (т. е. наибольшее отклонение его из положения равновесия) $x_0 = 5$ м. Маятник отпускался из крайнего положения без начального толчка. Определить боковое отклонение шара маятника от положения равновесия в момент прохождения его через среднее положение. Географическая широта Ленинграда $\vartheta = 60°$.

Решение. Эта задача решается проще, если движение рассматривать в неподвижной системе отсчета (точнее, в системе отсчета, вращающейся относительно Земли вокруг вертикали рассматриваемого места с угловой скоростью — $\boldsymbol{\omega}_в$). В этой системе уравнение малых колебаний математического маятника имеет вид $\ddot{\boldsymbol{r}} + \Omega^2 \boldsymbol{r} = 0$, где $\Omega^2 = g/l$, а $\boldsymbol{r}$ — смещение маятника из положения равновесия. В начальный момент маятник, вращаясь вместе с Землей, имеет боковую скорость $\omega_в x_0$. Поместим начало координат O в положение равновесия маятника. Ось X направим из точки O к точке ($x = x_0$, $y = 0$), в которой маятник находился в начальный момент. Для движения вдоль оси Y имеем $\ddot{y} + \Omega^2 y = 0$. Решая это уравнение при начальных условиях $y_{t=0} = 0$, $\dot{y}_{t=0} = \omega_в x_0$, получим

$$y = \frac{\omega_в x_0}{\Omega} \sin \Omega t.$$

В среднем положении $\Omega t = \pi/2$, и для бокового отклонения в этом положении наша формула дает

$$y = \frac{\omega_в x_0}{\Omega} = \frac{\omega x_0}{\Omega} \sin \vartheta \approx 1 \text{ мм}.$$

Читателю рекомендуется получить тот же результат, рассматривая движение в земной системе отсчета.

§ 69. Приливы

1. У берегов океанов и морей дважды в сутки наблюдается поднятие (*прилив*) морской воды до некоторого максимального уровня (*полная вода*). После этого начинается опускание ее (*отлив*) до минимального уровня (*малая вода*). Разность уровней большой и малой воды называется ***амплитудой прилива***. Время между сле-