

Эта сила искривляет траекторию маятника. Допустим сначала, что маятник отклонен в крайнее положение A , а затем отпущен без начальной скорости. Если бы не было кориолисовой силы, то маятник пришел бы в диаметрально противоположную точку A' . Кориолисова сила отклонит маятник в сторону, и он придет в точку B , расположенную правее. В этой точке скорость маятника обратится в нуль, а затем изменит направление. Изменит направление и кориолисова сила. Она по-прежнему будет изгибать траекторию маятника вправо (так как наблюдатель также должен повернуться, чтобы все время смотреть в направлении движения маятника). Затем маятник будет последовательно приходить в новые точки поворота C, D, \dots В результате получится сложная кривая с угловыми точками, изображенная схематически на рис. 190, а.

Несколько иной характер траектории получится в том случае, когда маятник сообщен толчок из положения равновесия. Траектория по-прежнему будет изгибаться вправо. Но в крайние точки A, B, C, \dots (рис. 190, б) маятник будет приходить с отличными от нуля азимутальными скоростями, которые он приобрел под действием кориолисовой силы, когда двигался из центра. В результате в местах поворота получатся не точки заострения, а плавные закругления, как это изображено на рисунке. Вследствие медленности вращения Земли наблюдатель не замечает искривления плоскости качания маятника. В обоих случаях ему кажется, что плоскость качаний маятника вращается вокруг вертикали с угловой скоростью $\omega_B = \omega \sin \vartheta$.

ЗАДАЧА

Один из маятников Фуко установлен в Ленинграде в Исаакиевском соборе. Длина маятника $l = 98$ м, линейная амплитуда колебаний шара маятника (т. е. наибольшее отклонение его из положения равновесия) $x_0 = 5$ м. Маятник отпускаялся из крайнего положения без начального толчка. Определить боковое отклонение шара маятника от положения равновесия в момент прохождения его через среднее положение. Географическая широта Ленинграда $\vartheta = 60^\circ$.

Решение. Эта задача решается проще, если движение рассматривать в неподвижной системе отсчета (точнее, в системе отсчета, вращающейся относительно Земли вокруг вертикали рассматриваемого места с угловой скоростью $-\omega_B$). В этой системе уравнение малых колебаний математического маятника имеет вид $\ddot{r} + \Omega^2 r = 0$, где $\Omega^2 = g/l$, а r — смещение маятника из положения равновесия. В начальный момент маятник, вращаясь вместе с Землей, имеет боковую скорость $\omega_B x_0$. Поместим начало координат O в положение равновесия маятника. Ось X направим из точки O к точке ($x = x_0, y = 0$), в которой маятник находился в начальный момент. Для движения вдоль оси Y имеем $\ddot{y} + \Omega^2 y = 0$. Решая это уравнение при начальных условиях $y_{t=0} = 0, \dot{y}_{t=0} = \omega_B x_0$, получим

$$y = \frac{\omega_B x_0}{\Omega} \sin \Omega t.$$

В среднем положении $\Omega t = \pi/2$, и для бокового отклонения в этом положении наша формула дает

$$y = \frac{\omega_B x_0}{\Omega} = \frac{\omega x_0}{\Omega} \sin \vartheta \approx 1 \text{ мм.}$$

Читателю рекомендуется получить тот же результат, рассматривая движение в земной системе отсчета.

§ 69. Приливы

1. У берегов океанов и морей дважды в сутки наблюдается поднятие (*прилив*) морской воды до некоторого максимального уровня (*полная вода*). После этого начинается опускание ее (*отлив*) до минимального уровня (*малая вода*). Разность уровней большой и малой воды называется *амплитудой прилива*. Время между сле-

дующими друг за другом положениями полной (или малой) воды составляет 12 ч. 25 мин. Это время точно совпадает с половиной промежутка времени, в течение которого Луна в своем видимом движении совершает полный оборот вокруг Земли. Поэтому уже давно причину приливов и отливов связывали с положением Луны на небесном своде. Однако научное объяснение этого явления впервые было дано Ньютоном.

Приливы и отливы объясняются *неоднородностью поля тяготения Луны и отчасти Солнца*. Если бы внешнее гравитационное поле было однородно, то в земной системе отсчета оно полностью компенсировалось бы поступательной силой инерции, связанной с ускоренным движением центра масс Земли (где мы помещаем начало координат этой системы). На самом деле гравитационное поле неоднородно, и полная компенсация имеет место только в центре масс Земли. В остальных точках полной компенсации нет. Остаются нескомпенсированные силы, которые и вызывают приливы. Влияние Луны более существенно, чем Солнца. Хотя лунное поле тяготения и слабее солнечного, но оно *более неоднородно*, так как Луна примерно в 400 раз ближе к Земле, чем Солнце. Рассмотрим сначала, как выглядело бы явление приливов, если бы Солнца не было, а Земля подвергалась воздействию гравитационного поля одной только Луны.

2. Для простоты будем считать Землю твердым недеформируемым шаром, покрытым океаном постоянной глубины. Будем считать также, что Луна движется в плоскости земного экватора. Рассмотрим точки океана, расположенные вдоль экватора. Земля и Луна вращаются вокруг их общего центра масс, как бы непрерывно падая на него. Но точка A (рис. 191), для которой Луна находится в *зените*, расположена ближе к Луне, чем центр Земли O . Последний в свою очередь ближе к Луне, чем диаметрально противоположная точка B , для которой Луна находится в *надире*. Поэтому гравитационное поле Луны в точке A сильнее, а в точке B слабее, чем в центре Земли. Под влиянием гравитационного притяжения Луны частицы воды в точке A будут приближаться к Луне с большим ускорением, чем центр Земли O , а частицы воды в точке B — с меньшим ускорением. Начиная с этого места, большинство авторов по примеру Ньютона рассуждает неточно. Заключение, касающиеся ускорений частиц, переносятся на их скорости и перемещения. Говорят, что частицы воды в A будут приближаться к Луне быстрее, чем центр Земли O , а потому они будут опережать последний. Напротив, частицы воды вблизи точки B будут отставать от центра Земли. По этой причине на поверхности океана образуются два диаметрально противоположных горба или выступа с центрами в точках A и B (рис. 192, а). Центры горбов все время обращены к Луне и от нее. Вследствие осевого вращения Земли они бегут по поверхности океана, непрерывно следуя за движением Луны. Вот почему два последовательных прилива (или отлива) отделены друг от друга промежутком времени в 12 ч. 25 мин. Согласно приведенному объяснению полная вода должна наблюдаться в моменты времени, когда Луна находится в *верхней* или *нижней кульминации* (в зените или надире), а малая вода — когда она находится в *квадратуре*. Наблюдения не согласуются с этим заключением. Скорее, справедлива обратная закономерность: *полная вода наблюдается в квадратурах, а малая — в кульминациях Луны* (рис. 192, б). Во всяком случае между кульминацией Луны и последующей полной водой проходит значительный промежуток времени, составляющий несколько часов. В службе портов среднее значение этого промежутка называется *прикладным часом*. Такое расхождение между теорией и наблюдениями связано прежде всего с неточностью в рассуждениях, отмеченной выше. Смещение и скорости

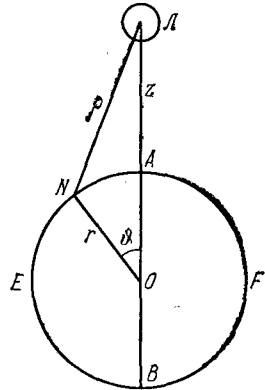


Рис. 191.

частиц воды определяются не только ускорениями, но и их *начальными значениями*. Если бы в какой-либо один и тот же момент времени (который можно принять за начальный) частицы воды находились, например, в состоянии покоя, то рассуждение было бы верным. Но это условие на Земле как раз и не выполняется. На этом вопросе мы остановимся несколько ниже.

3. Задачу построения теории приливов можно разделить на две части. Одна, более простая, заключается в нахождении *приливообразующих сил*, действующих

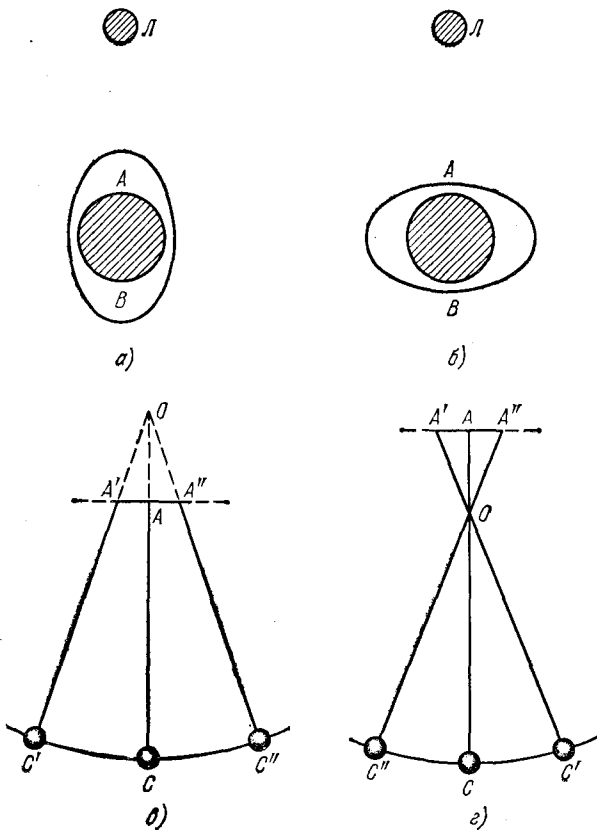


Рис. 192.

на воду океана в различных точках земного шара. Вторая, несравненно более трудная, состоит в том, чтобы определить *вынужденное движение* воды, которое установится под действием этих сил. Остановимся на первой части задачи.

Силы, действующие на частицы воды, в земной системе отсчета складываются из сил тяготения и сил инерции. Силы притяжения самой Земли, а также центробежные силы, возникающие из-за вращения Земли вокруг ее центра масс, в вопросах образования приливов роли не играют. Их результирующую напряженность мы будем обозначать g (ускорение свободного падения). Вектор g в каждой точке земной поверхности остается постоянным. Он определяет форму свободной поверхности океана в состоянии равновесия. Эта поверхность всюду перпендикулярна к вектору g . В теории приливов нас интересуют *отклонения от этой равно-*

весной формы, связанные с действием переменных приливообразующих сил. При определении этих отклонений равновесную форму поверхности воды в океане можно считать шаровой. Кориолисову силу инерции мы не будем принимать во внимание, потому что воду в океане в отсутствие возмущающих приливообразующих сил мы будем считать покоящейся. Кориолисовы силы, возникающие из-за движений воды, вызванных приливами и отливами, пренебрежимо малы. Таким образом, при вычислении приливообразующих сил надо учесть только силы тяготения внешних тел (Луны), а также силы инерции, связанные с ускоренным движением центра Земли. Такие силы инерции по нашей терминологии называются *поступательными силами инерции* (см. § 64).

4. Приливообразующую силу мы будем относить к единице массы, на которую она действует, и обозначать f . Проще сначала вычислить не самый вектор f , а соответствующий ему потенциал $\Phi_{\text{пр}}$, т. е. потенциальную энергию единицы массы, находящейся под действием силы f . Он складывается из потенциала сил тяготения Луны ($\Phi_{\text{Л}}$) и потенциала поступательных сил инерции ($\Phi_{\text{ин}}$). Опуская эти вычисления (они приводятся в задаче к этому параграфу), приведем окончательные результаты. Приливообразующий потенциал определяется выражением

$$\Phi_{\text{пр}} = -\frac{3}{4} \frac{GM_{\text{Л}}}{R_{3\text{Л}}^3} r^2 \cos 2\vartheta, \quad (69.1)$$

где $M_{\text{Л}}$ — масса Луны, $R_{3\text{Л}}$ — расстояние между центрами Земли и Луны, ϑ — зенитное расстояние Луны в рассматриваемый момент времени, r — расстояние от центра Земли до точки наблюдения N (рис. 191). Величины r и ϑ являются полярными координатами точки наблюдения. Приливообразующая сила найдется дифференцированием потенциала $\Phi_{\text{пр}}$. Она содержит вертикальную ($f_{\text{в}}$) и горизонтальную ($f_{\text{г}}$) составляющие:

$$f_{\text{в}} = -\frac{\partial \Phi_{\text{пр}}}{\partial r}, \quad f_{\text{г}} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_{\text{пр}}}{\partial \vartheta}. \quad (69.2)$$

(За положительные приняты направления возрастания величин r и ϑ .) Дифференцируя и вводя ускорение свободного падения $g = G \frac{M_{\text{З}}}{r^2}$, получим

$$f_{\text{в}} = \frac{3}{2} \frac{M_{\text{Л}}}{M_{\text{З}}} \left(\frac{r}{R_{3\text{Л}}} \right)^2 g \cos 2\vartheta, \quad (69.3)$$

$$f_{\text{г}} = \frac{3}{2} \frac{M_{\text{Л}}}{M_{\text{З}}} \left(\frac{r}{R_{3\text{Л}}} \right)^2 g \sin 2\vartheta. \quad (69.4)$$

Распределение приливообразующих сил вдоль экватора показано стрелками на схематическом рис. 193. Полная приливообразующая сила будет

$$f = \sqrt{f_{\text{в}}^2 + f_{\text{г}}^2} = \frac{3}{2} \frac{M_{\text{Л}}}{M_{\text{З}}} \left(\frac{r}{R_{3\text{Л}}} \right)^2 g. \quad (69.5)$$

Положив здесь $M_{\text{Л}}/M_{\text{З}} = 1/81$, $r/R_{3\text{Л}} = 1/60$, получим $f/g = 8,57 \cdot 10^{-8}$. Следует заметить, что Луна обращается вокруг Земли по эллиптической орбите. В перигее она бывает на расстоянии 57 земных радиусов, в апогее — на расстоянии 63,7 зем-

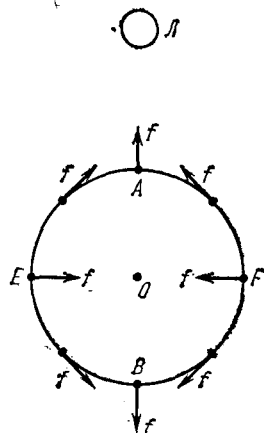


Рис. 193.

ных радиусов. Это сказывается на величине приливообразующей силы Луны. Для Луны отношение f/g меняется в пределах от $7,2 \cdot 10^{-8}$ (в апогее) до 10^{-7} (в перигее). Конечно, приведенные формулы полностью справедливы и для приливообразующих сил, вызываемых Солнцем. В этом случае $f/g = 3,8 \cdot 10^{-8}$, т. е. в $2^{1/4}$ раза меньше, чем для Луны при ее среднем удалении от Земли. Величина приливообразующей силы Солнца меняется в течение года примерно на 10%.

5. Приведенные результаты показывают, насколько ничтожны приливообразующие силы по сравнению с обычной силой тяжести на Земле. То обстоятельство, что эти силы вызывают такое грандиозное явление природы, как приливы и отливы, связано с тем, что они не постоянны, а *периодически меняются во времени*. Если бы приливообразующие силы менялись от точки к точке на земной поверхности, но оставались постоянными во времени, то они лишь слегка изменили бы равновесную форму свободной поверхности воды в океане. Но эта форма не менялась бы с течением времени, т. е. не было бы никаких приливов и отливов. В действительности, как показывают формулы (69.3), (69.4), (69.5), в каждой точке земного шара остается неизменной лишь величина приливообразующей силы, но не ее направление. Обе составляющие приливообразующей силы f_B и f_T в каждой точке земного шара периодически меняются во времени из-за суточных изменений зенитного расстояния Луны ϑ . Отвлекаясь от второстепенных обстоятельств, можно положить $\vartheta = \omega t$, где ω — угловая скорость осевого вращения Земли (относительно прямой Земля — Луна). Поэтому $f_B \sim \cos 2\omega t$, $f_T \sim \sin 2\omega t$. Когда сила f_B проходит через максимум, сила f_T обращается в нуль и наоборот. Это вызывает *периодические изменения направления отвеса* в каждой точке земного шара, что и является непосредственной причиной приливов и отливов.

6. Теперь мы должны обратиться ко второй части задачи о приливах, а именно определить воздействие заданных приливообразующих сил на воду в океане. Первая — *статическая* — теория приливов была разработана Ньютоном. Эта теория определяла мгновенную форму свободной поверхности океана, как если бы приливообразующие силы были постоянными, т. е. не менялись во времени. Согласно законам гидростатики свободная поверхность жидкости в состоянии равновесия в каждой точке перпендикулярна к (постоянным) действующим силам. Отсюда следует, что вдоль свободной поверхности жидкости потенциал всех действующих сил Φ не должен меняться. Очевидно, $\Phi = \Phi_0 + \Phi_{пр}$, где Φ_0 — потенциал всех сил, определяющих ускорение свободного падения g в отсутствие приливообразующих сил. Таким образом, по статической теории приливов уравнение свободной поверхности воды в океане должно иметь вид $\Phi_0 + \Phi_{пр} = \text{const}$ или более подробно

$$\Phi_0 - \frac{3}{4} \frac{GM_L}{R_{3L}^3} r^2 \cos 2\vartheta = \text{const}. \quad (69.6)$$

Применим это уравнение к точкам A и E на поверхности океана (рис. 193). Полагая сначала $\vartheta = 0$, а затем $\vartheta = \pi/2$, получим

$$\Phi_0(A) - \frac{3}{4} \frac{GM_L}{R_{3L}^3} r_A^2 = \Phi_0(E) + \frac{3}{4} \frac{GM_L}{R_{3L}^3} r_E^2.$$

Но $\Phi_0(A) - \Phi_0(E) = gH$, где $H = r_A - r_E$ — амплитуда прилива. У оставшихся двух членов значки A и E можно опустить, полагая $r_A = r_E = r$. Замечая еще, что $g = G \frac{M_3}{r^2}$ и используя формулу (69.5), получим

$$H = \frac{f}{g} r. \quad (69.7)$$

По этой формуле находим для амплитуды лунных приливов $H = 0,55$ м, а для амплитуды солнечных приливов $H = 0,24$ м. Таким образом, по статической

теории картина приливов и отливов должна соответствовать рис. 192, а, а не рис. 192, б. В этом основной недостаток статической теории приливов.

7. Правильная полная теория приливов должна быть *динамической*. Надо определить *вынужденное движение* воды в океане под действием заданных *переменных* приливообразующих сил. Важный принципиальный момент, который должна учесть теория, состоит в том, что вода в океане представляет собой механическую систему, которой подобно маятнику свойственны определенные *собственные частоты свободных колебаний*. Чтобы простейшим образом пояснить суть дела, вообразим вместе с Эйри, что на Земле вдоль ее экватора прорыт канал постоянной глубины, заполненный водой и опоясывающий весь земной шар. Если в каком-либо месте канала возникло возмущение, то оно будет распространяться вдоль него с определенной скоростью. Пренебрежем силами трения, действующими в жидкости. В этом случае, как доказывается в гидродинамике, скорость распространения длинноволновых возмущений (т. е. таких возмущений, длины волн которых очень велики по сравнению с глубиной канала h) определяется формулой $u = \sqrt{gh}$. Возьмем в качестве h среднюю глубину воды в океане ($h = 3,5$ км). Тогда нетрудно подсчитать, что возмущение обегит вокруг Земли за 60 часов. При рассмотрении явления приливов играет роль время, вдвое меньшее. Дело в том, что в этом случае возмущение состоит из двух одинаковых горбов A и B , расположенных в диаметрально противоположных точках земного шара (рис. 192, а, б). По истечении 30 часов горб A перейдет в положение B , а горб B — в положение A , и первоначальная форма поверхности воды в канале восстановится. Значит, воде в канале свойствен *собственный период колебаний* $T_0 = 30$ ч. Он больше периода колебаний приливообразующей силы $T = 12$ ч 25 мин. Из элементарной теории колебаний известно, что в этом случае (при отсутствии сил трения) *внешняя сила и возбужденные ею вынужденные колебания находятся в противоположных фазах*. Наоборот, при $T_0 < T$ колебания совершаются в *одинаковых фазах*. Так, если привести в колебания точку подвеса A математического маятника, то шарик маятника C также придет в колебание (рис. 192, в, г). При малых частотах колебаний точки подвеса она и шарик в каждый момент времени будут двигаться в одинаковых, при больших — в противоположных направлениях. Поскольку в разбираемом нами вопросе $T_0 > T$, картина приливов должна соответствовать рис. 192, б, а не рис. 192, а. Статическая теория приливов качественно верно описывала бы явление приливов, если бы было $T_0 < T$. Но для этого нужно, как нетрудно подсчитать, чтобы глубина h превышала ~ 20 км.

8. Солнечные приливы накладываются на приливы лунные. Если при этом наложении они усиливают друг друга, то приливы получают особенно сильными. Это происходит тогда, когда Солнце и Луна находятся на одной прямой с Землей, т. е. в полнолуние и новолуние. Наступающие тогда приливы называются *большими (сизигийными) приливами*. Наоборот, когда Луна находится в первой или последней четверти, лунный прилив ослабляется солнечным. Тогда говорят о *малом, или квадратурном, приливе*.

Полная теория приливов, отвечающая всем требованиям практики, еще не создана. Это и понятно. На характере приливов существенно сказывается сложный рельеф дна океанов и морей, наличие материков и островов, очертания берегов, трение, морские течения и ветры, деформации самой Земли под действием приливообразующих сил и множество других трудно учитываемых факторов.

На открытых островах в океане амплитуда прилива в полнолуние и новолуние обычно бывает ~ 1 м. Это находится в согласии с тем, что дает статическая теория приливов. У берегов океана амплитуда приливов обычно ~ 2 м. Мест с амплитудой в 3 м уже немного, а с амплитудой более 6 м очень мало. Все они находятся либо в узких проливах, либо в глубокие длинные заливы. Наиболее значительные приливы наблюдаются в заливе Фунди, на восточном берегу Канады. Этот залив расположен между материком и полуостровом Новая Шотландия. Амплитуда от 4 м при входе нарастает до 12—16 м в глубине залива. Во время сизигийных приливов здесь наблюдались амплитуды свыше 20 м.

ЗАДАЧА

Вывести формулы (69.1), (69.3), (69.4).

Решение. Как выяснено в тексте, $\varphi_{\text{пр}} = \varphi_{\text{Л}} + \varphi_{\text{ин}}$. Направим ось Z в сторону Луны (рис. 191). Пусть ω — ускорение, с которым центр Земли O приближается к центру масс Земля — Луна. Соответствующая сила инерции будет $-m\omega = -\omega$. Считая ее однородной, имеем $\varphi_{\text{ин}} = \omega z = \omega r \cos \vartheta$. Потенциал сил тяготения Луны равен

$$\varphi_{\text{Л}} = -G \frac{M_{\text{Л}}}{\rho}.$$

Из рис. 191 находим $\rho^2 = R_{\text{ЗЛ}}^2 - 2R_{\text{ЗЛ}}r \cos \vartheta + r^2$. Применяя формулу бинома Ньютона и пренебрегая кубами и высшими степенями r , получим

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{Л}} &= -\frac{GM_{\text{Л}}}{R_{\text{ЗЛ}}} \left(1 - \frac{2R_{\text{ЗЛ}}r \cos \vartheta - r^2}{R_{\text{ЗЛ}}^2} \right)^{-\frac{1}{2}} = \\ &= -\frac{GM_{\text{Л}}}{R_{\text{ЗЛ}}} \left[1 + \frac{2R_{\text{ЗЛ}}r \cos \vartheta - r^2}{2R_{\text{ЗЛ}}^2} + \frac{3}{8} \left(\frac{2r \cos \vartheta}{R_{\text{ЗЛ}}} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Постоянный член $-G \frac{M_{\text{Л}}}{R_{\text{ЗЛ}}}$, как и всякую постоянную в выражении потенциала, можно отбросить. Линейный по r член компенсируется потенциалом $\varphi_{\text{ин}}$, так как $\omega = G \frac{M_{\text{Л}}}{R_{\text{ЗЛ}}^2}$. Далее, из потенциала $\varphi_{\text{Л}}$ можно исключить все члены, зависящие только от r , но не зависящие от угла ϑ . Они вносят одну и ту же радиальную добавку в действующую силу во всех точках земной поверхности. Эту добавку можно включить в g . К образованию приливов она не имеет отношения. С учетом этих замечаний нетрудно получить

$$\varphi_{\text{пр}} = -\frac{3}{4} \frac{r^2}{R_{\text{ЗЛ}}} \omega \cos 2\vartheta = -\frac{3}{4} \frac{GM_{\text{Л}}}{R_{\text{ЗЛ}}^3} r^2 \cos 2\vartheta.$$

§ 70. Гравитационная масса и обобщенный закон Галилея

1. Понятие массы было введено нами с помощью закона сохранения импульса. В основе этого понятия лежат *инерционные свойства тел*. Поэтому так определенную массу называют *инертной массой* и иногда обозначают посредством $m^{(i)}$. Однако *тела обладают не только свойствами инерции, но и способностью возбуждать в окружающем пространстве гравитационные поля*. В этом отношении они аналогичны электрически заряженным телам, создающим вокруг себя электрическое поле. Инерция тел и их способность возбуждать в окружающем пространстве гравитационные поля не должны априори рассматриваться как взаимосвязанные и тем более тождественные свойства тел. Можно думать, что тела являются источниками гравитационных полей не потому, что они обладают инертными массами, а потому, что они несут особые заряды, аналогичные электрическим зарядам. Такие заряды называются *гравитационными зарядами* или *гравитационными массами*. Силы взаимодействия