ЗАДАЧА

Вывести формулы (69.1), (69.3), (69.4).

Решение. Как выяснено в тексте, $\varphi_{пр} = \varphi_Л + \varphi_{ин}$. Направим ось Z в сторону Луны (рис. 191). Пусть w — ускорение, с которым центр Земли O приближается к центру масс Земля — Луна. Соответствующая сила инерции будет $-mw = -w$. Считая ее однородной, имеем $\varphi_{ин} = wz = wr\cos\vartheta$. Потенциал сил тяготения Луны равен

$$\varphi_Л = -G\frac{M_Л}{\rho}.$$

Из рис. 191 находим $\rho^2 = R_{ЗЛ}^2 - 2R_{ЗЛ}r\cos\vartheta + r^2$. Применяя формулу бинома Ньютона и пренебрегая кубами и высшими степенями r, получнм

$$\varphi_Л = -\frac{GM_Л}{R_{ЗЛ}}\left(1 - \frac{2R_{ЗЛ}r\cos\vartheta - r^2}{R_{ЗЛ}^2}\right)^{-\frac{1}{2}} =$$
$$= -\frac{GM_Л}{R_{ЗЛ}}\left[1 + \frac{2R_{ЗЛ}r\cos\vartheta - r^2}{2R_{ЗЛ}^2} + \frac{3}{8}\left(\frac{2r\cos\vartheta}{R_{ЗЛ}}\right)^2\right].$$

Постоянный член $-G\frac{M_Л}{R_{ЗЛ}}$, как и всякую постоянную в выраженин потенциала, можно отбросить. Линейный по r член компенсируется потенциалом $\varphi_{ин}$, так как $w = G\frac{M_Л}{R_{ЗЛ}^2}$. Далее, из потенциала $\varphi_Л$ можно исключить все члены, зависящие только от r, но не зависящие от угла ϑ. Они вносят одну и ту же радиальную добавку в действующую силу во всех точках земной поверхности. Эту добавку можно включить в g. К образованию приливов она не имеет отношения. С учетом этих замечаний нетрудно получить

$$\varphi_{пр} = -\frac{3}{4}\frac{r^2}{R_{ЗЛ}}w\cos 2v = -\frac{3}{4}\frac{GM_Л}{R_{ЛЗ}^3}r^2\cos 2\vartheta.$$

§ 70. Гравитационная масса и обобщенный закон Галилея

1. Понятие массы было введено нами с помощью закона сохранения импульса. В основе этого понятия лежат *инерционные свойства тел*. Поэтому так определенную массу называют *инертной массой* и иногда обозначают посредством $m^{(i)}$. Однако *тела обладают не только свойствами инерции, но и способностью возбуждать в окружающем пространстве гравитационные поля*. В этом отношении они аналогичны электрически заряженным телам, создающим вокруг себя электрическое поле. Инерция тел и их способность возбуждать в окружающем пространстве гравитационные поля не должны априори рассматриваться как взаимосвязанные и тем более тождественные свойства тел. Можно думать, что тела являются источниками гравитационных полей не потому, что они обладают инертными массами, а потому, что они несут особые заряды, аналогичные электрическим зарядам. Такие заряды называются *гравитационными зарядами* или *гравитационными массами*. *Силы взаимодействия*

гравитационных масс, как показывает опыт, *изменяются обратно пропорционально квадрату расстояния между ними.* Для количественного определения гравитационных масс можно поступить так же, как поступают с электрическими зарядами в электростатике. Именно, обозначим гравитационные массы взаимодействующих точечных тел посредством $m_1^{(g)}$ и $m_2^{(g)}$. Тогда для силы их гравитационного притяжения можно написать

$$F = C\frac{m_1^{(g)} m_2^{(g)}}{r^2}, \qquad (70.1)$$

где C — численный коэффициент, зависящий только от выбора единиц. Этому коэффициенту можно приписать произвольную размерность и произвольное численное значение. Тогда, считая единицы для r и F установленными, мы установим также единицу гравитационной массы и ее размерность, а формула (70.1) даст принципиальный способ измерения гравитационных масс.

Пропорциональность силы гравитационного взаимодействия тел их гравитационным массам не является физическим законом. Мы так вводим понятие гравитационной массы, что указанная пропорциональность соблюдается *по определению. Физический закон, установленный Ньютоном, состоит в том, что сила гравитационного взаимодействия тел пропорциональна их инертным массам.* Отсюда следует, что *инертная масса тела пропорциональна его гравитационной массе.* Единицы этих масс можно выбрать так, чтобы они были не только пропорциональны, но и численно равны между собой. Поэтому этот фундаментальный физический закон называется *законом равенства, или эквивалентности, инертной и гравитационной масс.* Посмотрим, каковы его опытные основания и физические следствия.

2. Рассмотрим сначала свободное падение тел в поле тяжести Земли. По второму закону Ньютона $m^{(i)}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$, где $\boldsymbol{F}$ — сила тяжести. По смыслу под $m^{(i)}$ следует понимать инертную массу тела. Сила же тяжести может быть представлена в виде $\boldsymbol{F} = m^{(g)}\boldsymbol{g}$, где $m^{(g)}$ — гравитационная масса того же тела. Заметим, что сейчас мы рассматриваем движение относительно инерциальной системы отсчета и поэтому не вводим никаких сил инерции. Все силы являются «реальными» в ньютоновском смысле. В частности, сила тяжести $\boldsymbol{F}$ в нашем теперешнем рассмотрении есть сила только гравитационного притяжения между телом и Землей (центробежная сила в нее не входит). Второй закон Ньютона дает $m^{(i)}\boldsymbol{a} = m^{(g)}\boldsymbol{g}$, откуда

$$\boldsymbol{a} = \frac{m^{(g)}}{m^{(i)}}\boldsymbol{g}. \qquad (70.2)$$

Так как инертная и гравитационная массы равны, то $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{g}$. Все тела в поле тяжести Земли падают с одним и тем же ускорением. Этот экспериментальный факт, установленный впервые Галилеем, является подтверждением закона о равенстве инертной и гравитационной масс. Он справедлив и для любого гравитационного поля. *В одном и том же гравитационном поле все тела при свободном падении приобретают одинаковое ускорение.* Этим положением под названием обобщенного закона Галилея мы широко пользовались, начиная с § 65. Мы видим, что обобщенный закон *Галилея по своему содержанию совершенно эквивалентен принципу равенства инертной и гравитационной масс.*

Опыты Галилея имели малую точность. Значительно большей точности достигли Ньютон, а затем Бессель (1784—1846) в опытах с колебаниями маятника. Для периода малых колебаний математического маятника мы вывели формулу

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{70.3}$$

Если бы инертная и гравитационная массы не были равны между собой, то в этой формуле величину g следовало бы заменить на ускорение a, определяемое выражением (70.2). Тогда мы получили бы

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}\frac{m^{(i)}}{m^{(g)}}}. \tag{70.4}$$

Только при $m^{(i)} = m^{(g)}$ формула (70.4) переходит в формулу (70.3). В опытах Ньютона и Бесселя было установлено, что период колебаний математического маятника не зависит от материала, из которого он изготовлен. Это подтверждает закон равенства инертной и гравитационной масс. Относительная точность, с какой это равенство было установлено в опытах Бесселя, составляет 1/60 000.

3. Однако рекордными по точности долгое время оставались исследования венгерского физика Этвеша (1848—1919), начатые в 1887 году и продолжавшиеся до конца его жизни. Этвеш установил равенство инертной и гравитационной масс с относительной точностью $5 \cdot 10^{-9}$. По сравнению с опытами Ньютона точность была повышена примерно в сто тысяч, а по сравнению с опытами Бесселя — более чем в десять тысяч раз. Идея опытов Этвеша заключается в следующем. Вес тела складывается из двух различных сил: силы гравитационного притяжения Земли и центробежной силы инерции. Первая сила пропорциональна гравитационной массе, вторая равна $m^{(i)}\omega^2 \boldsymbol{r}_\perp$, т. е. пропорциональна инертной массе $m^{(i)}$. Если бы инертная и гравитационная массы не были строго пропорциональны друг другу, то направление отвеса зависело бы от материала тела. Опыты Этвеша имели целью обнаружение этого эффекта. С указанной выше точностью они привели к отрицательному результату, что является доказательством справедливости закона равенства инертной и гравитационной масс. Чтобы достигнуть такой точности, надо было оценивать изменения направления отвеса в $1{,}5 \cdot 10^{-6}$ дуговой секунды. Под таким углом был бы виден земному наблюдателю предмет в 3 мм, лежащий на поверхности Луны. Такой точности Этвешу и его сотрудникам удалось достигнуть при помощи *крутильных весов* и *гравитационных вариометров*. Хотя основные опыты были выполнены с гравитационными вариометрами, но мы опишем (конечно, схематически) опыты с крутильными весами, так как в идейном отношении они более просты.

На длинной тонкой нити подвешивался стержень, к концам которого можно было прикреплять грузы *1* и *2* (рис. 194, *б*), изготовленные из различных материалов, например из платины и меди.

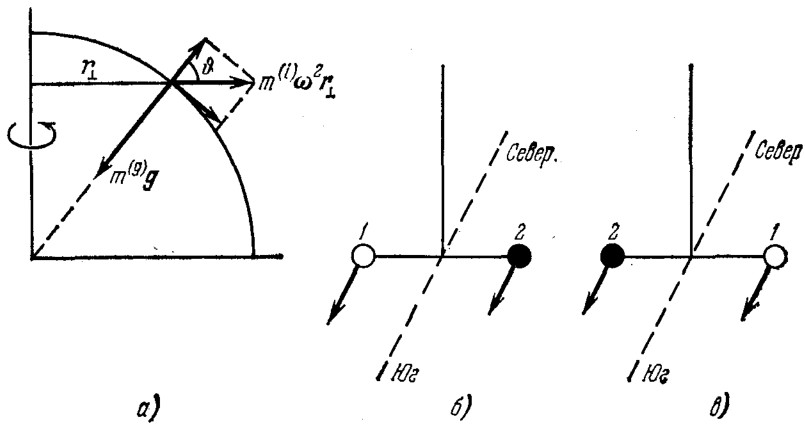

Рис. 194.

Стержень устанавливался перпендикулярно к меридиану рассматриваемого места. Пусть g означает напряженность земного гравитационного поля, т. е. силу, с которой это поле действует на единицу гравитационной массы. На груз будут действовать две силы: гравитационная $m^{(g)}\boldsymbol{g}$ и центробежная $m^{(i)}\omega^2\boldsymbol{r}_\perp$. Последняя имеет вертикальную составляющую $m^{(i)}\omega^2 r_\perp \cos\vartheta$ (рис. 194, *а*), где ϑ — географическая широта рассматриваемого места. Поэтому если стержень (рычаг) — равноплечий, то одно из условий равновесия грузов будет

$$m_1^{(g)}g - m_1^{(i)}\omega^2 r_\perp \cos\vartheta = m_2^{(g)}g - m_2^{(i)}\omega^2 r_\perp \cos\vartheta$$

или

$$m_1^{(i)}(\alpha_1 g - \omega^2 r_\perp \cos\vartheta) = m_2^{(i)}(\alpha_2 g - \omega^2 r_\perp \cos\vartheta),$$

где α_1 и α_2 — отношения гравитационных масс к инертным для грузов *1* и *2* соответственно. Если бы $\alpha_1 \neq \alpha_2$, то из полученного соотношения следовало бы, что $m_1^{(i)} \neq m_2^{(i)}$. В этом случае центробежные силы, действующие на грузы, а с ними и их горизонтальные составляющие, направленные к югу (рис. 194, *б* и *в*), не были бы одинаковыми. Поэтому появился бы вращающий момент

$$M_1 = \left(m_1^{(i)} - m_2^{(i)}\right) \frac{l}{2} \omega^2 r_\perp \sin\vartheta$$

(l — длина стержня), стремящийся закрутить нить. В состоянии равновесия угол кручения $\varphi_1 = (1/f)\, M_1$, где f — модуль кручения. Если весь прибор повернуть на 180°, т. е. перейти из положения *б*) в положение *в*) (рис. 194), то вращающий момент и угол кручения изменят знаки ($M_2 = -M_1$, $\varphi_2 = -\varphi_1$). При этом нить закрутится на угол $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = -(2/f)\, M_1$. Опыт Этвеша привел к отрицательному результату, т. е. он показал, что $\varphi = 0$, каковы бы ни были материалы, из которых изготовлены грузы. Следовательно, $\alpha_1 = \alpha_2$, что и доказывает равенство инертной и гравитационной масс.

4. *Одним из фундаментальных следствий теории относительности является связь между энергией и массой $E = mc^2$.* Здесь m означает инертную массу. Таким образом, *всякая энергия обладает инертной массой*. Закон эквивалентности инертной и гравитационной масс позволяет распространить это утверждение и на гравитационную массу. *Всякая энергия должна обладать также и гравитационной массой*. Высокая чувствительность опыта Этвеша позволила подвергнуть это заключение экспериментальной проверке. С этой целью Саузернс повторил опыт Этвеша с радиоактивными веществами. Опыт дал тот же результат: никакого различия между гравитационной и инертной массами обнаружено не было. Так как при радиоактивных превращениях энергия и инертная массы уменьшаются, то отсюда следует, что пропорционально уменьшается также и гравитационная масса. Таким образом, равенство инертной и гравитационной масс все время соблюдается.

5. Опыт Этвеша в усовершенствованном виде был повторен американским физиком Р. Дикке и его сотрудниками в 1961—1964 годах. Им удалось повысить точность результатов Этвеша более чем в 100 раз. Сравнивались грузы из меди и свинца, из золота и алюминия. С относительной точностью $3 \cdot 10^{-11}$ авторы констатировали равенство коэффициентов пропорциональности между гравитационной и инертной массами для этих материалов.

В идейном отношении опыт Дикке проще опыта Этвеша. В опыте Этвеша речь шла об эффектах, определяющихся совокупным действием гравитационного притяжения Земли и сил инерции, возникающих из-за ее осевого вращения. В опытах Дикке вместо Земли использовалось Солнце. Сравниваемые грузы *1* и *2* по-прежнему закреплялись на концах прямолинейного коромысла, подвешенного на тонкой нити (рис. 195, *а*). Для максимального уменьшения влияния посторонних возмущающих факторов это устройство помещалось в сосуд с высоким вакуумом. Прибор устанавливался в глубокой термостатированной шахте, удаленной от зданий. После установки прибора шахта запечатывалась, а прибор контролировался дистанционно из удаленной приборной будки на протяжении нескольких месяцев подряд.

Сила гравитационного притяжения Земли и центробежная сила, возникающая из-за вращения Земли вокруг своего центра, в опытах Дикке принципиальной роли не играют. От этих сил можно отвлечься. Они в рассматриваемой точке земного шара постоянны и определяют лишь положение равновесия, в котором стремится установиться коромысло. Для опыта имеют значение сила гравитационного притяжения Солнца и поступательная сила инерции, связанная с ускоренным движением центра Земли по направлению

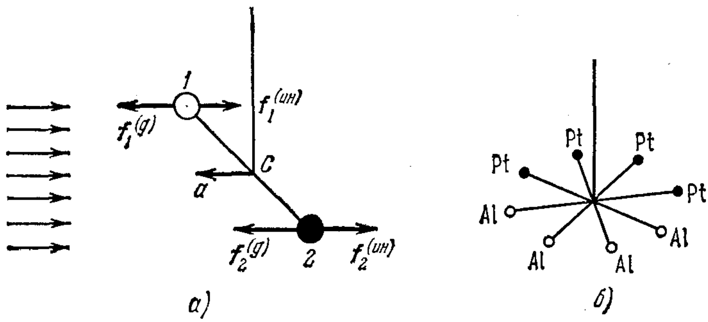

Рис. 195.

к Солнцу (влиянием Луны можно пренебречь). Обозначим это ускорение $\boldsymbol{a}$. По самому определению гравитационной массы сила гравитационного притяжения Солнца, отнесенная к единице такой массы, для всех тел одна и та же. Это есть напряженность гравитационного поля Солнца, зависящая только от самого Солнца. Обозначим ее $\boldsymbol{g}$. Но если бы нарушался закон эквивалентности инертной и гравитационной масс, то сила гравитационного притяжения Солнца, отнесенная к единице инертной массы, была бы разной для различных тел. В этом случае возник бы вращающий момент, стремящийся закрутить нить, на которой подвешено коромысло. Если h_1 и h_2 — плечи коромысла, а последнее подвешено за центр масс C (рис. 195, a), то вращающий момент относительно точки C будет

$$M = (m_1^{(g)}g - m_1^{(i)}a)\,h_1 + (m_2^{(i)}a - m_2^{(g)}g)\,h_2.$$

По определению центра масс (точнее, следовало бы сказать центра инертных масс) $m_1^{(i)}h_1 = m_2^{(i)}h_2$. Поэтому, используя ранее введенные обозначения α_1 и α_2, получим

$$M = m_1^{(i)}h_1 g\alpha_1 - m_2^{(i)}h_2 g\alpha_2 = m_1^{(i)}h_1 g\,(\alpha_1 - \alpha_2).$$

Плечи коромысла периодически меняются из-за видимого движения Солнца по небесному своду. Поэтому момент M также будет периодически изменяться и притом с периодом в одни сутки. В результате возникли бы вынужденные колебания коромысла с таким же периодом, которые можно было бы обнаружить с помощью чувствительной аппаратуры. На фоне неизбежных случайных толчков, которым подвержена система, такие колебания обнаружены не были. Отсюда следует, что в пределах ошибок измерений $\alpha_1 = \alpha_2$, т. е. соблюдается закон эквивалентности.

6. Опыт Дикке был повторен в усовершенствованном виде В. Б. Брагинским и В. И. Пановым в 1971 году. Вместо одного коромысла применялся крутильный маятник, эквивалентный четырем коромыслам, соединенным вместе, как указано на рис. 195, *б*. Точность опыта была повышена примерно еще в 30 раз. Сравнивались платина и алюминий. Равенство коэффициентов пропорциональности между гравитационной и инертной массами для этих веществ было подтверждено с относительной точностью 10^{-12}. Это то же самое, как если бы мы взвесили корабль водоизмещением в десять тысяч тонн вместе с грузом с точностью до одной сотой грамма.

7. Дорелятивистская физика не придавала существенного значения равенству инертной и гравитационной масс, рассматривая это равенство как случайное совпадение. Основополагающее значение закона эквивалентности инертной и гравитационной масс было понято Эйнштейном. Закон эквивалентности послужил для Эйнштейна отправным пунктом при построении *общей теории относительности,* называемой иначе *релятивистской теорией гравитации.* Этот закон является главным опытным фактом, на котором основана общая теория относительности. Последняя была бы неверна и от нее следовало бы отказаться, если бы было обнаружено малейшее нарушение закона эквивалентности инертной и гравитационной масс. Вот почему повышение и без того исключительной точности, с которой проверяется этот закон, имеет важное принципиальное значение, а не является просто спортивным увлечением с целью побития рекорда и установления нового.

§ 71. Принцип эквивалентности гравитационных сил и сил инерции

1. Мы уже неоднократно отмечали, что все тела, независимо от их масс и химического состава, получают в данном гравитационном поле одинаковые ускорения. Поэтому в таком поле они движутся совершенно одинаково, если только одинаковы начальные условия. Тем же свойством обладают свободно движущиеся тела, если их движение рассматривать относительно какой-либо неинерциальной системы отсчета. Иначе говоря, указанным свойством обладают также силы инерции. Эта аналогия между силами тяготения и силами инерции явилась отправной точкой при построении общей