§ 74. Упругие напряжения

1. Различные части деформированного тела взаимодействуют между собой на поверхностях раздела, вдоль которых они граничат друг с другом. Рассмотрим произвольное деформированное тело или среду. Мысленно разделим его на две части: тело I и тело II, граничащие между собой вдоль поверхности AB (рис. 197). Так как тело I деформировано, то оно действует на тело II с некоторой силой. По той же причине тело II действует на тело I с такой же, но противоположно направленной силой. Однако для определения возникающих деформаций недостаточно знать суммарные силы, действующие в сечении AB. Надо еще указать, как эти силы распределены по этому сечению. Возьмем на поверхности AB бесконечно малую площадку dS. Пусть $d\mathbf{F}$ — сила, с которой на этой площадке тело II действует на тело I. *Сила, отнесенная к единице площади*, т. е. $\frac{d\mathbf{F}}{dS}$, *называется напряжением*, действующим в соответствующей точке на границе AB тела I. Напряжение, действующее в той же точке на границе тела II, будет таким же, но его направление противоположно.

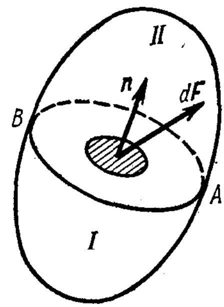

Рис. 197.

2. Ориентацию площадки dS можно задать, указав направление нормали к ней. Условимся эту нормаль проводить *наружу* от поверхности тела, на которое действует сила $d\mathbf{F}$. Обозначим $\mathbf{n}$ единичный вектор такой нормали, а $\boldsymbol{\sigma}_n$ — соответствующее напряжение. Тогда $\boldsymbol{\sigma}_{-n}$ будет означать напряжение на поверхности AB тела II, с которым граничит тело I. В силу равенства действия и противодействия $\boldsymbol{\sigma}_n = -\boldsymbol{\sigma}_{-n}$. Вектор $\boldsymbol{\sigma}_n$ можно разложить на составляющую вдоль нормали $\mathbf{n}$ и составляющую, лежащую в касательной плоскости к площадке dS. Первая составляющая называется *нормальным*, а вторая — *тангенциальным* напряжениями, действующими на площадке dS. Как и всякий вектор, напряжение $\boldsymbol{\sigma}_n$ можно характеризовать тремя составляющими его вдоль координатных осей X, Y, Z прямоугольной системы координат. Эти составляющие будем обозначать соответственно σ_{nx}, σ_{ny}, σ_{nz}. Первый индекс указывает направление внешней нормали к поверхности тела, на которой лежит площадка dS, а второй — направление оси, на которую проектируется напряжение $\boldsymbol{\sigma}_n$. В частности, $\boldsymbol{\sigma}_x$ означает напряжение на площадке, внешняя нормаль к которой параллельна положительному направлению оси X. Величины σ_{xx}, σ_{xy}, σ_{xz} означают проекции вектора $\boldsymbol{\sigma}_x$ на координатные оси.

3. Для того чтобы определить напряжение в среде на произвольно ориентированной площадке в какой-либо точке ее, достаточно

задать напряжение на трех взаимно перпендикулярных площадках, проходящих через эту точку. Это справедливо как для покоящейся среды, так и для среды, движущейся с произвольным ускорением. Для доказательства поместим начало координат в рассматриваемую точку среды и выделим из нее бесконечно малый элемент объема $OABC$, ограниченный координатными плоскостями и пересекающей их плоскостью ABC (рис. 198). Пусть $\boldsymbol{n}$ — внешняя нормаль к плоскости треугольника ABC. Тогда сила, действующая на грани ABC на выделенный элемент со стороны окружающей среды, будет $\boldsymbol{\sigma}_n S$, где S — площадь этой грани. Аналогично, силы, действующие на трех боковых гранях, будут $\boldsymbol{\sigma}_{-x}S_x$, $\boldsymbol{\sigma}_{-y}S_y$, $\boldsymbol{\sigma}_{-z}S_z$, где S_x, S_y, S_z — площади этих граней. Помимо этих сил на выделенный элемент могут действовать *массовые* или *объемные* силы, например, сила тяжести. Обозначим равнодействующую таких сил посредством $\boldsymbol{f}$. Сила $\boldsymbol{f}$ пропорциональна объему выделенного элемента. Если масса элемента m, а ускорение $\boldsymbol{a}$, то

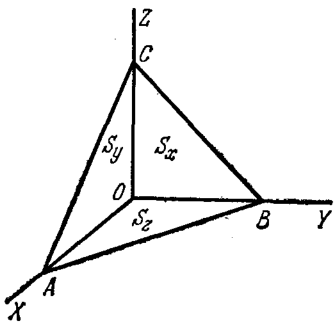

Рис. 198.

$$m\boldsymbol{a}=\boldsymbol{f}+\boldsymbol{\sigma}_n S+\boldsymbol{\sigma}_{-x}S_x+\boldsymbol{\sigma}_{-y}S_y+\boldsymbol{\sigma}_{-z}S_z.$$

Выполним в этом соотношении предельный переход, стягивая элемент $OABC$ в точку. При таком предельном переходе члены $m\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{f}$ можно отбросить. Они пропорциональны объему элемента $OABC$ и, следовательно, являются бесконечно малыми *высшего порядка* по сравнению с остальными членами, пропорциональными поверхности элемента. Как известно из геометрии, проекции площади S на координатные плоскости выражаются соотношениями

$$S_x=Sn_x, \qquad S_y=Sn_y, \qquad S_z=Sn_z.$$

Учтем далее, что $\boldsymbol{\sigma}_{-x}=-\boldsymbol{\sigma}_x$, $\boldsymbol{\sigma}_{-y}=-\boldsymbol{\sigma}_y$, $\boldsymbol{\sigma}_{-z}=-\boldsymbol{\sigma}_z$. Тогда в результате предельного перехода получится

$$\boldsymbol{\sigma}_n=\boldsymbol{\sigma}_x n_x+\boldsymbol{\sigma}_y n_y+\boldsymbol{\sigma}_z n_z. \tag{74.1}$$

Так как координатные оси X, Y, Z можно выбрать произвольно, то это соотношение и доказывает теорему.

Таким образом, *напряжение в каждой точке упруго деформированного тела можно характеризовать тремя векторами* $\boldsymbol{\sigma}_x$, $\boldsymbol{\sigma}_y$, $\boldsymbol{\sigma}_z$ *или девятью их проекциями*

$$\begin{matrix} \sigma_{xx}, & \sigma_{xy}, & \sigma_{xz}, \\ \sigma_{yx}, & \sigma_{yy}, & \sigma_{yz}, \\ \sigma_{zx}, & \sigma_{zy}, & \sigma_{zz}. \end{matrix} \tag{74.2}$$

Совокупность этих девяти величин называется *тензором упругих напряжений*.

Вообще говоря, эти величины меняются от точки к точке среды, т. е. являются функциями координат. Только в статике в отсутствие массовых сил тензор упругих напряжений остается одним и тем же во всех точках среды.

4. *Тензор упругих напряжений является симметричным тензором*, т. е.

$$\sigma_{ij}=\sigma_{ji} \qquad (i,\ j=x,\ y,\ z). \tag{74.3}$$

Для доказательства рассмотрим элементарный параллелепипед вещества со сторонами dx, dy, dz (рис. 199). Момент сил M_z относительно оси Z, действующий на этот параллелепипед, равен

$$M_z=(\sigma_{xy}\,dy\,dz)\,dx-(\sigma_{yx}\,dx\,dz)\,dy=(\sigma_{xy}-\sigma_{yx})\,dV,$$

где dV — объем рассматриваемого элементарного параллелепипеда. По уравнению моментов

$$(\sigma_{xy}-\sigma_{yx})\,dV=I_z\frac{d\omega_z}{dt},$$

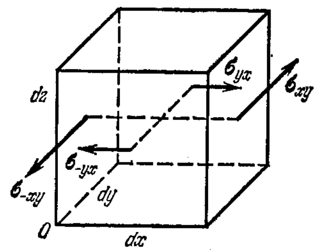

Рис. 199.

где I_z и ω_z — момент инерции и угловая скорость относительно оси Z. Но момент инерции I_z пропорционален произведению массы на квадрат линейных размеров рассматриваемого параллелепипеда, т. е. является бесконечно малой величиной *более высокого порядка*, чем объем параллелепипеда dV. Поэтому при стягивании параллелепипеда в точку правая часть $I_z\frac{d\omega_z}{dt}$ будет быстрее обращаться в нуль, чем левая. В пределе мы получим $\sigma_{xy}=\sigma_{yx}$. Аналогично доказываются и остальные два соотношения: $\sigma_{yz}=\sigma_{zy}$ и $\sigma_{zx}=\sigma_{xz}$.

5. Можно доказать, что *координатную систему X, Y, Z можно выбрать так, чтобы в этой системе обратить в нуль все недиагональные элементы тензора упругих напряжений, т. е.* $\sigma_{ij}=0$ при $i\neq j$. Не останавливаясь на доказательстве, заметим только, что это можно сделать потому, что тензор упругих напряжений σ_{ij} является симметричным. Таким образом, в этой системе координат упругие напряжения в каждой точке тела характеризуются только тремя величинами σ_{xx}, σ_{yy} и σ_{zz}. В целях краткости их можно обозначать с помощью одного индекса, т. е. σ_x, σ_y и σ_z. Соответствующие координатные оси называют *главными осями* тензора упругих напряжений.