§ 75. Растяжение и сжатие стержней

1. Возьмем однородный стержень и приложим к его основаниям растягивающие или сжимающие силы F (рис. 200, *а* и *б*). Стержень будет деформирован, т. е. растянут или сжат. Мысленно проведем произвольное сечение C, перпендикулярное к оси стержня. Для равновесия стержня AC необходимо, чтобы на его нижнее основание C действовала сила $F_1 = F$. Это есть сила, с которой нижняя часть стержня BC тянет верхнюю или давит на нее. Такая сила возникает потому, что нижняя часть стержня деформирована. Верхняя часть стержня также деформирована и действует на нижнюю с силой, равной F_1 и противоположно направленной. Такие силы действуют в любом поперечном сечении растянутого или сжатого стержня. Таким образом, деформация стержня связана с возникновением упругих сил, с которыми каждая часть стержня действует на другую, с которой она граничит. Силу, отнесенную к единице площади поперечного сечения стержня, мы назвали напряжением. В рассматриваемом случае напряжение перпендикулярно к поперечному сечению стержня. *Если стержень растянут, то* это *напряжение называется натяжением* и определяется выражением

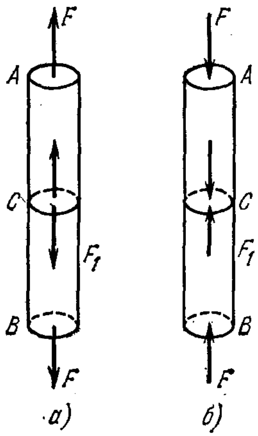

Рис. 200.

$$T = \frac{F}{S}, \tag{75.1}$$

где S — площадь поперечного сечения стержня. *Если же стержень сжат, то напряжение называется давлением* и численно определяется той же формулой

$$P = \frac{F}{S}. \tag{75.2}$$

Давление можно рассматривать как отрицательное натяжение и наоборот, т. е.

$$P = -T. \tag{75.3}$$

Это замечание освобождает нас от необходимости рассматривать отдельно растяжение и сжатие.

2. Пусть l_0 — длина недеформированного стержня. После приложения силы F его длина получает приращение Δl и делается равной $l = l_0 + \Delta l$. Отношение

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \tag{75.4}$$

называется *относительным удлинением стержня.* В случае растягивающих сил оно положительно, в случае сжимающих сил — отрицательно. Относительное удлинение, взятое с противоположным знаком, называется *относительным сжатием.* Таким образом, по определению относительным сжатием называется величина $-(\Delta l)/l_0$. Она положительна в случае сжимающих сил и отрицательна — в случае растягивающих.

Опыт показывает, что *для не слишком больших упругих деформаций натяжение T (или давление P) пропорционально относительному удлинению (или относительному сжатию)*

$$T = E\frac{\Delta l}{l_0} \quad \text{или} \quad P = -E\frac{\Delta l}{l_0}, \tag{75.5}$$

где E — постоянная, зависящая только от материала стержня и его физического состояния. Она называется *модулем Юнга* (1773—1829). Формулы (75.5) выражают *закон Гука* (1635—1703) *для деформаций растяжения и сжатия стержней.* Это — приближенный закон. Для больших деформаций он может не оправдываться. Деформации, для которых приближенно выполняется закон Гука, называются *малыми деформациями.* Если в формуле (75.3) положить $\Delta l = l_0$, то получится $T = E$. Поэтому модуль Юнга часто определяют как натяжение, которое надо приложить к стержню, чтобы его длина удвоилась, если бы при такой деформации закон Гука оставался еще верным. Недостаток этого определения состоит в том, что при таких больших деформациях закон Гука почти для всех тел становится недействительным: тело либо разрушается, либо нарушается пропорциональность между деформацией и приложенным напряжением.

3. Более общим, чем закон Гука, является утверждение, что в *случае упругих деформаций натяжение T является однозначной функцией относительного удлинения* ε: $T = T(\varepsilon)$. Эта функция должна обращаться в нуль при $\varepsilon = 0$, так как с исчезновением деформации ε исчезает и напряжение T. Поэтому в разложении функции $T(\varepsilon)$ в ряд по степеням ε должен отсутствовать нулевой член. Это разложение должно иметь вид

$$T = E\varepsilon + A\varepsilon^2 + B\varepsilon^3 + \ldots,$$

причем коэффициенты E, A, B, ... являются постоянными, зависящими только от материала стержня и его физического состояния. Если относительное удлинение ε мало, то высшими степенями ε можно пренебречь. Тогда мы придем к закону Гука (75.5). При этом мы делаем относительную ошибку порядка $\frac{A\varepsilon^2}{E\varepsilon} \sim \varepsilon$. Эти общие соображения показывают, что *закон Гука и основанные на нем расчеты верны с относительной ошибкой порядка* ε. Поэтому во всех таких расчетах мы не только можем, но и должны отбросить слагаемые, которые по сравнению с основными членами являются величинами порядка ε, ε^2 и т. д. Например, относительное удлинение ε можно определить не только выражением (75.4), но и выражением $(\Delta l)/l$. Дело в том, что разность этих двух выражений

$$\frac{\Delta l}{l_0}-\frac{\Delta l}{l}=\frac{(l-l_0)\,\Delta l}{l\,l_0}=\frac{(\Delta l)^2}{l\,l_0}\sim\varepsilon^2$$

второго порядка малости по ε, а потому ею следует пренебречь. Таким образом, закон Гука (75.5) можно также представить в виде

$$T=E\frac{\Delta l}{l},\qquad P=-E\frac{\Delta l}{l},\tag{75.6}$$

или

$$\frac{\Delta l}{l}=\frac{T}{E},\qquad \frac{\Delta l}{l}=-\frac{P}{E}.\tag{75.7}$$

Это замечание, касающееся точности вычислений, разумеется, относится не только к деформациям растяжения и сжатия, но и ко всем малым деформациям, о которых будет идти речь ниже.

4. Пусть в стержне создано натяжение T_1. Оно вызовет относительное удлинение $\frac{\Delta_1 l}{l_0}=\frac{T_1}{E}$, и длина стержня сделается равной $l_1=l_0+\Delta_1 l$. Свойства материалов при деформациях, вообще говоря, изменяются. Поэтому можно было бы ожидать, что изменится и модуль Юнга. Однако если деформации малы (а только для таких деформаций и имеет смысл говорить о модуле Юнга), то с такими изменениями можно не считаться. Действительно, обозначим E_1 модуль Юнга деформированного стержня. Если к деформированному стержню приложить дополнительное натяжение T_2, то его длина получит дополнительное приращение $\Delta_2 l$, причем $\frac{\Delta_2 l}{l_1}=\frac{T_1}{E_1}$. Принимая во внимание точность, с которой справедлив закон Гука, можно считать, что $\frac{\Delta_2 l}{l_1}=\frac{\Delta_2 l}{l_0}$. Имея еще в виду, что полное удлинение равно $\Delta l=\Delta_1 l+\Delta_2 l$, получим

$$\frac{\Delta l}{l_0}=\frac{T_1}{E}+\frac{T_2}{E_1}.$$

Но Δl не обязательно разлагать на составные части $\Delta_1 l$ и $\Delta_2 l$. Эту величину можно рассматривать как единое удлинение под действием результирующего натяжения $T=T_1+T_2$. Поступая так, можно написать на основании закона Гука

$$\frac{\Delta l}{l_0}=\frac{T}{E}=\frac{T_1}{E}+\frac{T_2}{E}.$$

Сравнивая с предыдущим выражением, получим $E = E_1$, что и требовалось доказать.

Приведенное рассуждение справедливо не только для деформаций растяжения и сжатия, но и для любых малых деформаций. *Если деформации малы, то упругие постоянные тел не изменяются при деформациях*. Отсюда следует, что *если на тело действует несколько сил, то для вычисления результирующей деформации можно вычислить сначала деформации, вызываемые каждой силой в отдельности* (как если бы остальных сил не было вовсе), а *затем полученные деформации сложить*. Это важное положение называется *принципом суперпозиции малых деформаций*.

5. Для того чтобы деформировать тело, над ним надо совершить работу. В свою очередь деформированное тело само может совершать работу. Оно обладает запасом потенциальной энергии. Эта энергия называется *упругой*. Она равна работе сил, затраченной на деформацию тела, при том существенном условии, что вся эта работа тратится только на приращение упругой энергии тела и не расходуется на увеличение кинетической энергии. Для того чтобы кинетическая энергия при деформации не возникала, надо деформацию производить достаточно медленно, постепенно увеличивая внешние силы, чтобы в любой момент времени каждая часть тела практически находилась в состоянии равновесия. Иначе говоря, при деформации внешние силы все время должны уравновешиваться возникающими при этом силами внутренних напряжений. Если это условие выполнено, то говорят, что тело совершает *квазистатический процесс*.

Возьмем для иллюстрации спиральную пружину, которая может служить моделью деформируемого тела. Повесим ее за верхний конец. К нижнему концу подвесим груз, удерживая его рукой, чтобы пружина не растягивалась. Если груз внезапно отпустить, то возникнут колебания. Работа силы веса груза идет не только на растяжение пружины, но расходуется также на увеличение кинетической энергии груза и пружины. Это — процесс не квазистатический. Для вычисления упругой энергии пружины такой процесс не годится. Прикрепим теперь к нижнему концу пружины легкую чашечку и будем очень медленно нагружать ее песком. Колебания не возникают, пружина медленно и непрерывно удлиняется по мере увеличения нагрузки. Вся работа силы тяжести идет на увеличение потенциальной энергии деформируемой пружины. Такой процесс является квазистатическим, и им можно воспользоваться для вычисления упругой энергии пружины.

6. После этих замечаний легко вычислить упругую энергию растянутого стержня. Приложим к стержню растягивающую силу $f(x)$ и будем непрерывно и медленно увеличивать ее от начального значения $f = 0$ до конечного значения $f = F$. При этом удлинение стержня будет меняться от $x = 0$ до конечного значения $x = \Delta l$. По закону Гука $f(x) = kx$, где k — *коэффициент упругости*, который легко выразить через модуль Юнга. Вся работа в рассматриваемом процессе пойдет на приращение упругой энергии U, а потому

$$U = \int_0^{\Delta l} f(x)\,dx = k\int_0^{\Delta l} x\,dx = \frac{1}{2}k(\Delta l)^2. \tag{75.8}$$

Так как в конечном состоянии $x = \Delta l$, то $F = f(\Delta l) = k\Delta l$. Учитывая это, получим

$$U = \frac{1}{2}F\,\Delta l. \tag{75.9}$$

Если бы к недеформированному стержню мы сразу приложили постоянную силу F, то при удлинении его на Δl была бы совершена вдвое большая работа $A = F\Delta l$. Так как запас упругой потенциальной энергии в стержне получился бы тем же самым, то ясно, что только половина работы A расходуется на приращение упругой энергии стержня. Вторая половина этой работы тратится на кинетическую энергию упругих колебаний и волн, которые всегда возбуждаются в стержне при неквазистатическом воздействии на него. При квазистатическом воздействии колебания и волны не возникают. Вот почему в формулах (75.8) и (75.9) появился численный коэффициент $^1/_2$.

Найдем *объемную плотность упругой энергии*, т. е. *упругую энергию u, приходящуюся на единицу объема растянутого* (*или сжатого*) *стержня*. Она найдется делением выражения (75.9) на объем стержня $V = Sl$. Это дает

$$u = \frac{1}{2}\frac{F}{S}\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{2}T\varepsilon. \tag{75.10}$$

Если воспользоваться законом Гука, то эту формулу нетрудно привести к виду

$$u = \frac{1}{2}E\varepsilon^2 = \frac{T^2}{2E} = \frac{P^2}{2E}. \tag{75.11}$$

7. Опыт показывает, что *под действием растягивающей или сжимающей силы F изменяются не только продольные, но и поперечные размеры стержня. Если сила F — растягивающая, то поперечные размеры стержня уменьшаются. Если она сжимающая, то они увеличиваются*. Пусть a_0 — толщина стержня до деформации, a — после деформации. За толщину можно принять для круглого стержня его диаметр, для прямоугольного — одну из сторон его прямоугольного основания и т. д. Если сила F растягивающая, то величина $-\frac{\Delta a}{a_0} \approx$ $\approx -\frac{\Delta a}{a}$ называется *относительным поперечным сжатием* стержня ($\Delta a = a - a_0$). Отношение относительного поперечного сжатия к соответствующему относительному продольному удлинению называется *коэффициентом Пуассона* (1781—1840):

$$\mu = -\frac{\Delta a}{a} : \frac{\Delta l}{l} = -\frac{\Delta a}{\Delta l}\cdot\frac{l}{a}. \tag{75.12}$$

Коэффициент Пуассона зависит только от материала тела и является одной из важных постоянных, характеризующих его упругие свойства. Случай сжимающих сил не обязательно выделять особо, так как сжимающую силу можно рассматривать как растягивающую, взятую с противоположным знаком.

Модуль Юнга E и коэффициент Пуассона μ полностью характеризуют упругие свойства изотропного материала. Все прочие упругие постоянные могут быть выражены через E и μ.

8. Заметим, наконец, что все модули и коэффициенты упругости, с которыми мы имели и будем иметь дело, следовало бы для точности называть *изотермическими модулями* и *коэффициентами*. Они характеризуют деформации тел в предположении, что температура их поддерживается постоянной. Это обычно имеет место в случае статических деформаций. Но если деформации динамические (например, волны в упругих средах), то они могут происходить настолько быстро, что разности температур, возникшие при деформации, не успевают выравниваться в результате теплообмена. Важнейшим является предельный случай, когда между различно нагретыми частями среды теплообмен совсем не происходит. Соответствующие процессы, модули и коэффициенты упругости называются *адиабатическими*. Соотношения между изотермическими и адиабатическими модулями упругости будут рассмотрены в т. II.

ЗАДАЧИ

1. Найти относительное удлинение вертикально подвешенного стержня под действием собственного веса P. Площадь поперечного сечения стержня равна S.

Ответ. $\dfrac{l-l_0}{l_0}=\dfrac{P}{2SE}$.

2. Упругий стержень массы m, длины l и площади поперечного сечения S движется в продольном направлении с ускорением a (одинаковым для всех точек стержня). Найти упругую энергию деформации, возникающую вследствие ускоренного движения.

Ответ. $U=\dfrac{m^2a^2l}{6ES}$.

3. Какой максимальной кинетической энергией может обладать маховик, объем которого $V = 1$ м^3, если прочность материала на разрыв $T = 10^{10}$ дин/см^2. Всю массу маховика считать сосредоточенной в его ободе (тонком по сравнению с радиусом маховика). Показать, что при неизменной прочности материала маховика максимальная кинетическая энергия зависит только от объема, но не от массы маховика.

Ответ. $K=\dfrac{1}{2}TV=5\cdot 10^8$ Дж.

4. Тонкий стержень длины $2l$ равномерно вращается вокруг перпендикулярной к нему оси, проходящей через центр стержня, с угловой скоростью ω. Показать, что натяжение T, возникающее в стержне при таком вращении, удовлетворяет уравнению

$$\frac{dT}{dx}=-\rho\omega^2x,$$

где ρ — плотность материала стержня, а x — расстояние от оси вращения. Интегрируя это уравнение, найти распределение натяжения в стержне. В каком месте стержня натяжение максимально и чему оно равно? Показать, что максимальная кинетическая энергия, которую можно сообщить стержню при неизменной прочности его материала, зависит только от объема стержня V, но не от его массы. Вычислить максимальную кинетическую энергию для $V = 3\cdot 10^4$ см^3, если максимальное натяжение, которое может выдержать стержень, равно $T_{\text{макс}} = 10^{10}$ дин/см^2.

Ответ. $T = \frac{1}{2}\rho\omega^2(l^2 - x^2)$. Натяжение максимально в центре и равно $T_{\text{макс}} = {}^1/_2\ \rho\omega^2 l^2$.

$$K_{\text{макс}} = \frac{1}{3} V T_{\text{макс}} = 10^7 \text{ Дж}.$$

(Ср. с задачей 3 к § 19.)

5. Стержень поперечного сечения S растягивается силой F, параллельной его оси. Под каким углом α к оси наклонено сечение, в котором тангенциальное напряжение τ максимально. Найти это напряжение.

Ответ. $\alpha = 45^\circ$, $\tau = \frac{F}{2S}$.

6. Резиновый цилиндр с высотой h, весом P и площадью основания S поставлен на горизонтальную плоскость. Найти энергию упругой деформации цилиндра, возникающей под действием его собственного веса. Во сколько раз изменится энергия упругой деформации рассматриваемого цилиндра, если на верхнее основание его поставить второй такой же цилиндр?

Ответ. $U = \frac{P^2 h}{6ES}$. Во втором случае упругая энергия увеличится в 7 раз.

§ 76. Деформации прямоугольного параллелепипеда под действием трех взаимно перпендикулярных сил

1. Допустим, что однородное изотропное тело имеет форму прямоугольного параллелепипеда, к противоположным граням которого приложены силы F_x, F_y, F_z, нормальные к этим граням. Соответствующие им натяжения обозначим T_x, T_y, T_z (рис. 201). Определим деформации, которые возникнут под действием этих сил. Будем предполагать деформации малыми. Тогда для решения задачи можно воспользоваться принципом суперпозиции малых деформаций.

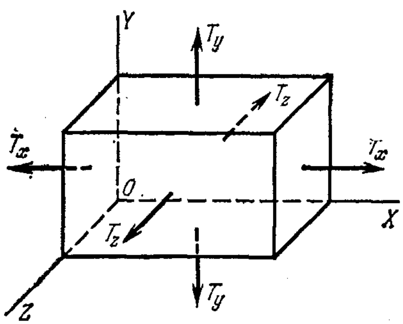

Рис. 201.

Направим координатные оси параллельно ребрам параллелепипеда. Пусть x, y, z — длины этих ребер. Если бы действовала только сила F_x, то ребро x получило бы приращение $\Delta_1 x$, определяемое соотношением $\frac{\Delta_1 x}{x} = \frac{T_x}{E}$. Если бы действовала только сила F_y, то