где ρ — плотность материала стержня, а x — расстояние от оси вращения. Интегрируя это уравнение, найти распределение натяжения в стержне. В каком месте стержня натяжение максимально и чему оно равно? Показать, что максимальная кинетическая энергия, которую можно сообщить стержню при неизменной прочности его материала, зависит только от объема стержня V, но не от его массы. Вычислить максимальную кинетическую энергию для $V = 3\cdot 10^4$ см^3, если максимальное натяжение, которое может выдержать стержень, равно $T_{\text{макс}} = 10^{10}$ дин/см^2.

Ответ. $T=\frac{1}{2}\rho\omega^2(l^2-x^2)$. Натяжение максимально в центре и равно $T_{\text{макс}} = {}^1/_2\ \rho\omega^2 l^2$.

$$K_{\text{макс}}=\frac{1}{3}VT_{\text{макс}}=10^7 \text{ Дж}.$$

(Ср. с задачей 3 к § 19.)

5. Стержень поперечного сечения S растягивается силой F, параллельной его оси. Под каким углом α к оси наклонено сечение, в котором тангенциальное напряжение τ максимально. Найти это напряжение.

Ответ. $\alpha=45^\circ$, $\tau=\frac{F}{2S}$.

6. Резиновый цилиндр с высотой h, весом P и площадью основания S поставлен на горизонтальную плоскость. Найти энергию упругой деформации цилиндра, возникающей под действием его собственного веса. Во сколько раз изменится энергия упругой деформации рассматриваемого цилиндра, если на верхнее основание его поставить второй такой же цилиндр?

Ответ. $U=\frac{P^2h}{6ES}$. Во втором случае упругая энергия увеличится в 7 раз.

§ 76. Деформации прямоугольного параллелепипеда под действием трех взаимно перпендикулярных сил

1. Допустим, что однородное изотропное тело имеет форму прямоугольного параллелепипеда, к противоположным граням которого приложены силы F_x, F_y, F_z, нормальные к этим граням. Соответствующие им натяжения обозначим T_x, T_y, T_z (рис. 201). Определим деформации, которые возникнут под действием этих сил. Будем предполагать деформации малыми. Тогда для решения задачи можно воспользоваться принципом суперпозиции малых деформаций.

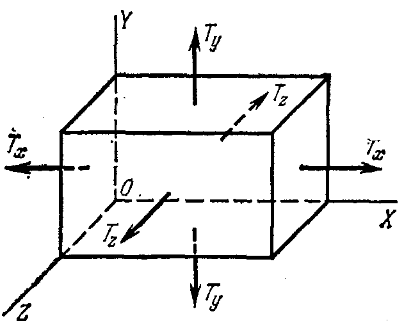

Рис. 201.

Направим координатные оси параллельно ребрам параллелепипеда. Пусть x, y, z — длины этих ребер. Если бы действовала только сила F_x, то ребро x получило бы приращение $\Delta_1 x$, определяемое соотношением $\frac{\Delta_1 x}{x}=\frac{T_x}{E}$. Если бы действовала только сила F_y, то размеры параллелепипеда, перпендикулярные к оси Y, сократились бы. В частности, ребро x при этом получило бы отрицательное приращение $\Delta_2 x$, которое можно вычислить по формуле $\frac{\Delta_2 x}{x} = -\mu \frac{T_y}{E}$. Наконец, относительное приращение ребра x под действием одной только силы F_z было бы равно $\frac{\Delta_3 x}{x} = -\mu \frac{T_z}{E}$. Если все силы действуют одновременно, то согласно принципу суперпозиции малых деформаций результирующее удлинение ребра x будет равно $\Delta x = \Delta_1 x + \Delta_2 x + \Delta_3 x$. Аналогично вычисляются удлинения параллелепипеда и вдоль остальных двух направлений Y и Z. В результате для удлинений всех трех ребер параллелепипеда можно написать

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &\equiv \frac{\Delta x}{x} = \frac{T_x}{E} - \frac{\mu}{E}(T_y + T_z), \\ \varepsilon_y &\equiv \frac{\Delta y}{y} = \frac{T_y}{E} - \frac{\mu}{E}(T_z + T_x), \\ \varepsilon_z &\equiv \frac{\Delta z}{z} = \frac{T_z}{E} - \frac{\mu}{E}(T_x + T_y). \end{aligned} \tag{76.1}$$

2. При квазистатическом растяжении параллелепипеда вдоль оси X совершается работа $A_1 = {}^1/_2\, S_x T_x \Delta x$, где $S_x = yz$ — площадь грани, перпендикулярной к оси X. Эту работу можно представить в виде $A_1 = {}^1/_2\, xyz \cdot T_x \frac{\Delta x}{x} = {}^1/_2\, V T_x \varepsilon_x$, где $V = xyz$ — объем параллелепипеда. Аналогично запишутся работы при квазистатических растяжениях в направлениях координатных осей Y и Z. Сложив эти три работы и разделив результат на объем параллелепипеда, получим следующее выражение для плотности упругой энергии в рассматриваемом случае:

$$u = \frac{1}{2}(T_x \varepsilon_x + T_y \varepsilon_y + T_z \varepsilon_z). \tag{76.2}$$

С помощью формул (76.1) это выражение приводится в виду

$$u = \frac{1}{2E}\left[T_x^2 + T_y^2 + T_z^2 - 2\mu (T_x T_y + T_y T_z + T_z T_x)\right]. \tag{76.3}$$

Если из трех натяжений T_x, T_y, T_z только одно отлично от нуля, то эти формулы переходят в более простые формулы (75.10) и (75.11). Согласно формулам (75.11) *плотность упругой энергии и пропорциональна квадрату натяжения T (или давления P)*. В общем случае, как показывает формула (76.3), плотность упругой энергии является квадратичной однородной функцией T_x, T_y, T_z (или P_x, P_y, P_z). При заданных натяжениях (или давлениях) она обратно пропорциональна модулю упругости E. Чем жестче пружина, тем меньше при неизменном натяжении ее упругая энергия. Идеально твердые тела (для которых $E = \infty$) совершенно не обладают упругой энергией, какие бы силы натяжения и давления на них ни действовали.

Натяжения T_x, T_y, T_z выражаются через ε_x, ε_y, ε_z линейно, как это следует из формул (76.1). Поэтому плотность упругой энергии является квадратичной однородной функцией деформаций ε_x, ε_y, ε_z. В частном случае ($\varepsilon_x = \varepsilon$, $\varepsilon_y = \varepsilon_z = 0$) она пропорциональна *квадрату деформации*. При заданных деформациях ε_x, ε_y, ε_z плотность упругой энергии u пропорциональна модулю упругости E. Чем жестче пружина, тем больше ее упругая энергия (при неизменной деформации).

ЗАДАЧА

Определить относительное изменение объема полого латунного шара радиуса $R = 5$ см, в который накачан воздух до давления 11 атм (наружное давление 1 атм). Толщина сферической оболочки $d = 1$ мм. Модуль Юнга латуни $E = 10^{12}$ дин/см², коэффициент Пуассона $\mu = 0{,}3$.

Решение. В силу симметрии касательное напряжение τ, действующее в оболочке, одно и то же и одинаково во всех направлениях. Возьмем малый элемент оболочки, имеющий форму прямоугольника. При вычислении относительного изменения площади этого элемента под действием касательных напряжений τ можно отвлечься от кривизны элемента, приняв его за плоскую прямоугольную пластинку. Тогда вычисление дает

$$\frac{\Delta S}{S} = 2(1-\mu)\frac{\tau}{E}$$

(изменением площади, вызванным нормальным давлением, пренебрегаем). Поскольку площадь S пропорциональна $V^{2/3}$, относительное изменение объема будет $\frac{\Delta V}{V} = \frac{3}{2}\frac{\Delta S}{S}$. Так как поверхность искривлена, то натяжение τ создаст разность нормальных давлений. Для нее нетрудно получить $2\tau d/R$ (см. *формулу Лапласа* в учении о поверхностном натяжении, том II). Эта разность должна быть уравновешена разностью давлений газа ΔP по разные стороны оболочки. В результате получим

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{3}{2}\frac{(1-\mu)R}{Ed}\Delta P \approx 5 \cdot 10^{-4}.$$

§ 77. Всестороннее и одностороннее растяжение и сжатие

1. Рассмотрим частный случай, когда все натяжения T_x, T_y, T_z равны и отрицательны. В этом случае на параллелепипед со всех сторон действует постоянное давление $P = -T_x = -T_y = -T_z$. Как видно из формул (76.1), все три относительные деформации ε_x, ε_y, ε_z равны между собой и определяются выражением

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\frac{P}{E}(1-2\mu). \qquad (77.1)$$

Их легко выразить через относительное изменение объема параллелепипеда при деформации. Действительно, взяв логарифмические производные от обеих частей равенства $V = xyz$, получим

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} + \frac{\Delta z}{z}$$

или

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z. \qquad (77.2)$$