Эта величина должна совпадать с (78.2), так как значение u не может зависеть от способа вычисления. Сравнивая оба выражения, получим

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}. \tag{78.4}$$

Эта формула устанавливает связь между модулем Юнга E, коэффициентом Пуассона μ и модулем сдвига G. Используя ее, а также формулы (77.10) и (77.4), получим

$$E' = K + \frac{4}{3} G. \tag{78.5}$$

§ 79. Кручение

1. Деформации, о которых шла речь до сих пор, были деформациями *однородными,* т. е. такими, когда все бесконечно малые элементы тела деформированы одинаково. *Деформации кручения и изгиба*, к изучению которых мы обращаемся, *являются деформациями неоднородными*. Это значит, что в этих случаях деформации внутри тела меняются от точки к точке.

Возьмем однородную проволоку, закрепим ее верхний конец, а к нижнему концу приложим закручивающие силы, создающие вращающий момент M относительно продольной оси проволоки. Проволока закрутится — каждый радиус нижнего основания ее повернется вокруг продольной оси на угол φ. Такая деформация называется *кручением*. Закон Гука для деформации кручения записывается в виде

$$M = f\varphi, \tag{79.1}$$

где f — постоянная для данной проволоки величина, называемая ее *модулем кручения*. В отличие от ранее введенных модулей E, K, E', G и коэффициента μ, *модуль кручения зависит не только от материала, но и от геометрических размеров проволоки*.

2. Выведем выражение для модуля кручения f. Сначала сделаем это для цилиндрической трубки радиуса r и длины l, предполагая, что толщина δr стенки трубки очень мала по сравнению с радиусом r. Площадь основания трубки есть $2\pi r\delta r$. Момент сил, действующий на это основание, будет $M = 2\pi r\delta r\cdot\tau r$, где τ — касательное напряжение в том же основании. При квазистатическом закручивании проволоки на угол φ совершается работа $A = {}^1/_2 M\varphi = \frac{M^2}{2f}$. Разделив ее на объем трубки $V = 2\pi rl\delta r$, найдем плотность упругой энергии при деформации кручения

$$u = \frac{\pi\tau^2 r^3\delta r}{fl}. \tag{79.2}$$

Ту же величину можно выразить иначе. Вырежем мысленно из трубки бесконечно короткую часть, изображенную на рис. 205. В результате деформации кручения бесконечно малый элемент трубки $ABDC$ перейдет в положение $A'B'DC$. Это есть сдвиг. Таким образом, деформацию кручения можно рассматривать как неоднородный сдвиг. Плотность упругой энергии при сдвиге дается выражением (78.2). Приравнивая его выражению (79.2), находим искомое соотношение

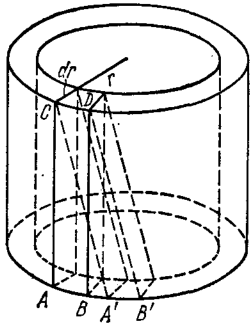

Рис. 205.

$$f = \frac{2\pi G r^3 \delta r}{l}. \tag{79.3}$$

Если стенка трубки имеет конечную толщину, то модуль f найдется интегрированием последнего выражения по r. Это дает

$$f = \frac{\pi G}{2l}(r_2^4 - r_1^4), \tag{79.4}$$

где r_1 — внутренний радиус трубки, а r_2 — наружный. Для сплошной проволоки радиуса r

$$f = \frac{\pi G}{2l} r^4. \tag{79.5}$$

3. Экспериментально модуль кручения можно измерить, наблюдая крутильные колебания тяжелого тела, подвешенного к нижнему концу проволоки. Эти колебания будут гармоническими с периодом

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{f}} \tag{79.6}$$

(см. § 42). Если момент инерции тела I известен, то, измерив период колебаний T, можно вычислить по этой формуле модуль кручения f.

ЗАДАЧИ

1. Две проволоки одинаковой длины сделаны из одного и того же материала, но диаметр второй из них вдвое больше, чем первой. В одном из опытов нижнее основание каждой проволоки было закручено относительно ее верхнего основания на один и тот же угол. В другом опыте проволоки были сварены своими основаниями так, что ось одной из них сделалась продолжением оси другой; затем нижнее основание получившейся составной проволоки было закручено относительно верхнего на некоторый угол. Найти отношения упругих энергий проволок в обоих случаях.

Ответ. 1) $\frac{U_1}{U_2} = \frac{1}{16}$. 2) $\frac{U_1}{U_2} = 16$.

2. Шар, подвешенный на проволоке, совершает крутильные колебания с периодом T вокруг вертикальной оси. Найти период колебаний того же шара T', если проволоку, на которой он был подвешен, заменить цилиндрической трубкой той же длины и массы с внешним радиусом R и внутренним радиусом r и изготовленной из того же материала.

Ответ. $T' = T\sqrt{\frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2}}$.

3. Определить удлинение спиральной пружины, если растягивающие силы действуют вдоль ее оси. Шаг спирали считать пренебрежимо малым по сравнению с радиусом витка R. Модуль кручения проволоки, из которой изготовлена спираль, считать известным.

Решение. Произведем мысленный разрез проволоки пружины в произвольной точке A плоскостью, проходящей через ось пружины (рис. 206, *а*). Пусть $\boldsymbol{F}_1$ — сила, с которой нижняя часть пружины действует на верхнюю в месте разреза. Для равновесия необходимо, чтобы $\boldsymbol{F}_1 = -\boldsymbol{F}$, где $\boldsymbol{F}$ — растягивающая сила, действующая на верхнюю часть пружины. Так как силы $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{F}_1$ образуют пару, то момент этой пары не зависит от выбора точки, относительно которой он берется. Этот момент перпендикулярен к плоскости разреза и равен $M = FR$. Из-за малости шага витка можно считать, что момент в точке A направлен вдоль оси проволоки. Чтобы рассматриваемая часть пружины находилась в равновесии, необходимо, чтобы возникло кручение проволоки вокруг ее оси, компенсирующее момент $\boldsymbol{M}$. Когда растягивающие силы F действуют вдоль оси пружины,

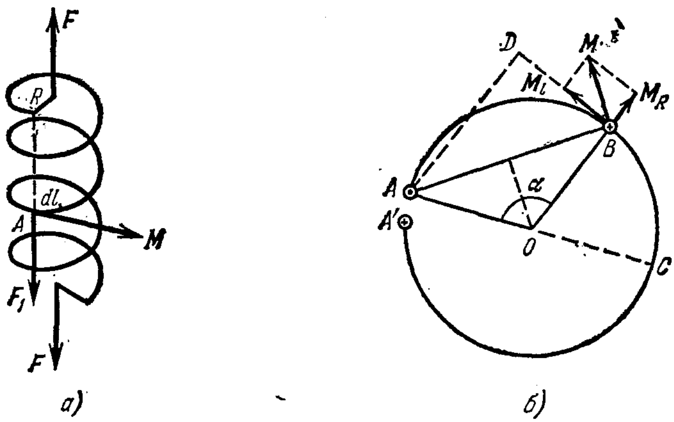

Рис. 206.

величина момента M не меняется вдоль проволоки, а потому кручение ее будет равномерным. Пусть dl — элемент длины проволоки. Под действием момента M он закрутится на угол $d\varphi = M/f_1$, где f_1 — модуль кручения рассматриваемого элемента. Обозначим f модуль кручения всей проволоки (если ее выпрямить). Так как модуль кручения обратно пропорционален длине проволоки l_0, то $f = f_1 \frac{dl}{l_0}$, а потому $d\varphi = \frac{M}{f} \frac{dl}{l_0}$. В результате закручивания элемента dl на угол $d\varphi$ нижний конец проволоки опустится на $dx = R\,d\varphi = \frac{MR}{f} \frac{dl}{l_0} = \frac{FR^2}{f} \frac{dl}{l_0}$. Интегрируя по длине всей проволоки, найдем удлинение пружины

$$x = \frac{FR^2}{f}. \tag{79.7}$$

Введем коэффициент упругости пружины по формуле $F = kx$. Тогда

$$k = \frac{f}{R^2}. \tag{79.8}$$

4. Рассмотреть ту же задачу для случая, когда растягивающие силы действуют не вдоль оси пружины, а вдоль одной из образующих цилиндрической поверхности, на которую она намотана.

Решение. Мысленно выделим произвольный участок проволоки AB (рис. 206, *б*). Силы, действующие на его концы, перпендикулярны к плоскости рисунка (параллельны продольной оси пружины). Каждая из этих сил равна внешней силе F, приложенной к пружине. Силу, направленную к нам, изобразим точкой, от нас — крестиком. Момент $\boldsymbol{M}$ сил, приложенных к выделенному участку, перпендикулярен к хорде AB и равен $M = 2FR\sin(\alpha/2)$. Разложим этот момент на составляющую $\boldsymbol{M}_l$ вдоль проволоки и составляющую $\boldsymbol{M}_R$, перпендикулярную к ней. Если пружина содержит много витков, то составляющую $\boldsymbol{M}_R$ можно не учитывать. Она вызывает изгиб проволоки вокруг оси, параллельной радиусу OB. Но легко видеть, что такой момент изгибает участок AC в одну сторону, а участок CA' — в противоположную, так что в целом при большом числе витков изгиб практически не влияет на удлинение пружины. Момент M_l равен $M\sin(\alpha/2) = 2FR\sin^2(\alpha/2)$. Элемент проволоки длины dl он закрутит на угол $d\varphi = \frac{M_l}{f_1} = \frac{M_l}{f}\frac{dl}{l_0}$ и сместит свободный конец пружины на величину

$$dx = AD\cdot d\varphi = AB\sin\frac{\alpha}{2}\cdot d\varphi = \frac{4FR^2}{fl_0}\sin^4\frac{\alpha}{2}\,dl = \frac{4FR^3}{fl_0}\sin^4\frac{\alpha}{2}\,d\alpha.$$

В отличие от предыдущего случая, кручение проволоки неоднородно. Интегрируя по всей длине пружины и считая число витков целым, получим

$$x = \frac{3}{4}\frac{FR^2}{f}.$$

§ 80. Изгиб

1. Рассмотрим изгиб однородного бруса (балки) произвольного поперечного сечения, которое, однако, должно оставаться одинаковым на протяжении всей длины бруса. Пусть до деформации брус имел прямолинейную форму. Проведя сечения AB и $A'B'$, нормальные к оси бруса, мысленно вырежем из него бесконечно малый элемент $AA'B'B$ (рис. 207, *а*), длину которого обозначим l_0. Ввиду

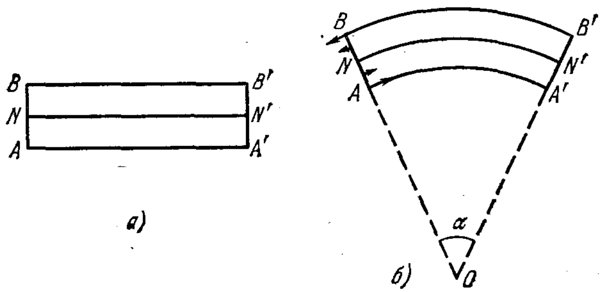

Рис. 207.

бесконечной малости выделенного элемента можно считать, что в результате изгиба прямые AA', NN', BB' и все прямые, им параллельные, перейдут в окружности с центрами, лежащими на оси O, перпендикулярной к плоскости рисунка (рис. 207, *б*). Эта ось называется *осью изгиба*. Наружные волокна, лежащие выше линии NN', при изгибе удлиняются, волокна, лежащие ниже линии NN', — укорачиваются. Длина линии NN' остается неизменной. Эта линия называется *нейтральной линией*. Проходящее через нее сечение (недеформированного) бруса