Решение. Мысленно выделим произвольный участок проволоки AB (рис. 206, б). Силы, действующие на его концы, перпендикулярны к плоскости рисунка (параллельны продольной оси пружины). Каждая из этих сил равна внешней силе F, приложенной к пружине. Силу, направленную к нам, изобразим точкой, от нас — крестиком. Момент $\boldsymbol{M}$ сил, приложенных к выделенному участку, перпендикулярен к хорде AB и равен $M = 2FR \sin(\alpha/2)$. Разложим этот момент на составляющую $\boldsymbol{M}_l$ вдоль проволоки и составляющую $\boldsymbol{M}_R$, перпендикулярную к ней. Если пружина содержит много витков, то составляющую $\boldsymbol{M}_R$ можно не учитывать. Она вызывает изгиб проволоки вокруг оси, параллельной радиусу OB. Но легко видеть, что такой момент изгибает участок AC в одну сторону, а участок CA' — в противоположную, так что в целом при большом числе витков изгиб практически не влияет на удлинение пружины. Момент M_l равен $M \sin(\alpha/2) = 2FR \sin^2(\alpha/2)$. Элемент проволоки длины dl он закрутит на угол $d\varphi = \dfrac{M_l}{f_1} = \dfrac{M_l}{f}\dfrac{dl}{l_0}$ и сместит свободный конец пружины на величину

$$dx = AD \cdot d\varphi = AB \sin\frac{\alpha}{2} \cdot d\varphi = \frac{4FR^2}{fl_0}\sin^4\frac{\alpha}{2}\,dl = \frac{4FR^3}{fl_0}\sin^4\frac{\alpha}{2}\,d\alpha.$$

В отличие от предыдущего случая, кручение проволоки неоднородно. Интегрируя по всей длине пружины и считая число витков целым, получим

$$x = \frac{3}{4}\frac{FR^2}{f}.$$

§ 80. Изгиб

1. Рассмотрим изгиб однородного бруса (балки) произвольного поперечного сечения, которое, однако, должно оставаться одинаковым на протяжении всей длины бруса. Пусть до деформации брус имел прямолинейную форму. Проведя сечения AB и $A'B'$, нормальные к оси бруса, мысленно вырежем из него бесконечно малый элемент $AA'B'B$ (рис. 207, a), длину которого обозначим l_0. Ввиду

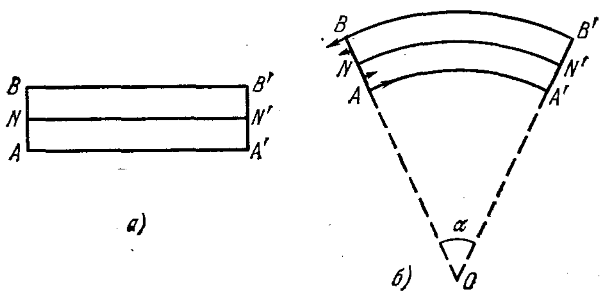

Рис. 207.

бесконечной малости выделенного элемента можно считать, что в результате изгиба прямые AA', NN', BB' и все прямые, им параллельные, перейдут в окружности с центрами, лежащими на оси O, перпендикулярной к плоскости рисунка (рис. 207, б). Эта ось называется *осью изгиба*. Наружные волокна, лежащие выше линии NN', при изгибе удлиняются, волокна, лежащие ниже линии NN', — укорачиваются. Длина линии NN' остается неизменной. Эта линия называется *нейтральной линией*. Проходящее через нее сечение (недеформированного) бруса плоскостью, перпендикулярной к плоскости рис. 207, *а*, называется *нейтральным сечением*. Таким образом, все наружные волокна будут натянуты, все внутренние — сжаты. Пусть R — радиус кривизны нейтральной линии NN'. Тогда $l_0 = R\alpha$, где α — центральный угол, опирающийся на дугу NN'. Рассмотрим волокно бруса, находящееся на расстоянии ξ от нейтрального сечения. (Величина ξ положительна, если волокно находится выше нейтрального сечения (рис. 207, *б*) и отрицательна, если оно находится ниже.) Если брус не слишком толст, так что $|\xi| \ll R$, то длина рассматриваемого волокна будет $l = (R + \xi)\alpha$, а удлинение $\Delta l = l - l_0 = \xi\alpha$. Следовательно, натяжение, действующее вдоль рассматриваемого волокна, $\tau = E\dfrac{\Delta l}{l_0} = E\xi\dfrac{\alpha}{l_0}$, или

$$\tau = E\frac{\xi}{R}. \tag{80.1}$$

Натяжение, таким образом, меняется линейно с расстоянием ξ. Ниже нейтрального сечения оно отрицательно, т. е. является давлением. Сумма сил натяжения и давления, действующих в сечении AB, может быть и отличной от нуля. Однако в этом случае на изгиб бруса будет накладываться растяжение или сжатие его, одинаковое для всех волокон. Оно может быть учтено особо и исключено из рассмотрения, когда речь идет об изгибе в чистом виде. Поэтому мы будем считать, что сумма всех сил натяжения, действующих в каждом нормальном сечении бруса, равна нулю, т. е. $\int \tau\, dS = 0$ или в силу (80.1) $\int \xi\, dS = 0$, где dS — элемент площади рассматриваемого поперечного сечения. Интегрирование ведется по всему поперечному сечению бруса. Отсюда видно, что нейтральная линия и нейтральное сечение проходят через центр тяжести поперечного сечения бруса. Из соотношения $\int \tau\, dS = 0$ следует, что момент сил натяжения M_τ, действующих на сечение AB, не зависит от того, относительно какой оси он берется. Для вычисления M_τ проще всего взять ось, перпендикулярную к плоскости рисунка и проходящую через точку N. Очевидно,

$$M_\tau = \int \xi\tau\, dS = \frac{E}{R}\int \xi^2\, dS,$$

или

$$M_\tau = \frac{E}{R} I, \tag{80.2}$$

где введено обозначение

$$I = \int \xi^2\, dS. \tag{80.3}$$

Величина I называется *моментом инерции* поперечного сечения бруса по аналогии с соответствующей величиной, вводимой при рассмотрении вращения тела вокруг неподвижной оси. Однако, в отличие от последней величины, имеющей размерность массы, умноженной на квадрат длины, (80.3) есть чисто геометрическая величина с размерностью четвертой степени длины.

Можно воспользоваться формулами для моментов инерции, выведенными в § 36, заменив всюду массу m на площадь поперечного сечения S. Если поперечное сечение бруса имеет форму прямоугольника с шириной a и высотой b, то

$$I = \frac{ab^3}{12}. \tag{80.4}$$

Для кругового поперечного сечения радиуса r

$$I = \frac{\pi r^4}{4}. \tag{80.5}$$

Для цилиндрической трубы с внутренним диаметром r_1 и наружным r_2

$$I = \frac{\pi}{4}(r_2^4 - r_1^4). \tag{80.6}$$

Направим ось X вдоль нейтральной линии недеформированного бруса. Ось Y направим к ней перпендикулярно и расположим в плоскости изгиба. Тогда уравнение нейтральной линии изогнутого бруса можно представить в виде $y = y(x)$. По известной формуле

$$\frac{1}{R} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}.$$

Если изгиб мал ($y' \ll 1$), то квадратом производной можно пренебречь. В этом приближении

$$M_\tau = EIy''. \qquad (80.7)$$

2. Вырежем произвольную (конечную или бесконечно малую) часть бруса, мысленно проведя в нем два нормальных сечения. В состоянии равновесия момент упругих сил натяжения, действующих на торцах вырезанной части, должен быть уравновешен противоположно направленными моментами всех прочих внешних сил, действующих на рассматриваемую часть. Это дает метод решения задач

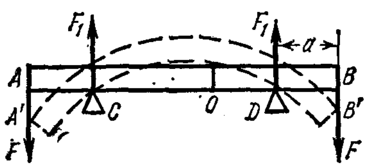

Рис. 208.

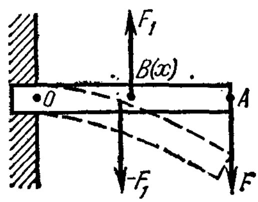

Рис. 209.

на изгиб. Он иллюстрируется примерами, приводимыми ниже, а также задачами к этому параграфу.

Пример 1. Однородный стержень AB лежит на двух симметрично расположенных опорах C и D (рис. 208). К концам стержня A и B приложены равные и одинаково направленные силы F. Определим форму стержня в состоянии равновесия, пренебрегая весом самого стержня. Из симметрии ясно, что в равновесии опоры C и D будут давить на стержень с одинаковыми силами F_1 и F_1, каждая из которых равна F. Проведем в стержне нормальное сечение через произвольно расположенную точку O. Достаточно рассмотреть равновесие одной из частей стержня, например части OB. Упругие натяжения в сечении O создают вращающий момент M_τ, определяемый формулой (80.2). Пара сил F_1 и F создает противоположно направленный момент $M = Fa$, где a — расстояние между линиями действия сил F_1 и F. Как и M_τ, момент M не зависит от положения оси, относительно которой он берется. Кроме того, момент M не зависит от положения точки O. Он одинаков вдоль всего стержня. Уравнение равновесия $M_\tau = M$ принимает вид $IE/R = Fa$. Из него следует, что радиус кривизны R одинаков во всех точках нейтральной линии стержня. Следовательно, в состоянии равновесия стержень будет иметь форму дуги окружности, как это изображено на рис. 208 пунктирными линиями.

Для демонстрации можно взять деревянную доску и вколотить в нее гвозди в точках A', B', C, D. Если между этими гвоздями заложить гибкую стальную линейку, то она примет форму дуги окружности. Это дает практический способ черчения окружностей, когда обычный чертежный циркуль оказывается непригодным (например, в случае окружностей очень большого радиуса).

Пример 2. Определим стрелу прогиба балки, жестко закрепленной в стене одним из своих концов (рис. 209). На другой конец балки действует сосредоточенная сила F. Весом самой балки будем пренебрегать. Стрелой прогиба мы называем смещение свободного конца балки под действием приложенной силы F.

Поместим начало координат в точке O, в которой нейтральная линия балки пересекается с плоскостью стены. Через произвольную точку $B(x)$ (с координатой $x = OB$) проведем нормальное сечение. Для равновесия необходимо, чтобы сила F_1, действующая на часть BA со стороны части OB, была направлена вверх и равнялась F. Вместе с F она образует пару сил с моментом $M = F(l-x)$, где l — длина балки. Момент сил натяжения возьмем в приближенном виде (80.7), считая, что прогиб мал. Это приводит к уравнению

$$EIy'' = F(l-x).$$

(Ось y направлена в сторону вогнутости, т. е. вниз. При таком условии вторая производная y'' положительна, и обе части последнего соотношения имеют одинаковые знаки.) Интегрируя это уравнение один раз, получим

$$y' = \frac{F}{EI}x\left(l-\frac{x}{2}\right)+C.$$

Постоянная интегрирования C равна нулю, так как при $x=0$, т. е. в точке O, касательная к нейтральной линии горизонтальна. Интегрируя вторично и учитывая, что в точке O (т. е. при $x=0$) $y=0$, найдем

$$y=\frac{Fx^2}{2EI}\left(l-\frac{x}{3}\right). \tag{80.8}$$

Полагая здесь $x = l$, находим стрелу прогиба

$$\lambda=\frac{Fl^3}{3EI}. \tag{80.9}$$

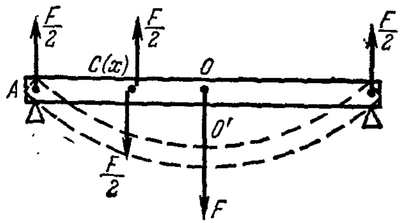

Рис. 210.

Пример 3. Определим стрелу прогиба центра балки, лежащей на двух опорах, если к ее середине O приложена сосредоточенная сила F, направленная вниз (рис. 210). Весом балки, как и в предыдущем примере, пренебрежем. Вследствие симметрии сила F распределится между опорами поровну. Поместим начало координат в точку A нейтральной линии, расположенную над левой опорой. Отсечем мысленно слева часть балки, проведя нормальное сечение через произвольную точку $C(x)$ (с координатой x), расположенную левее центра O ($x < l/2$, где l — длина балки). Справа на отсеченную часть балки будет действовать сила $F/2$, направленная вниз. Момент внешних сил, действующих на отсеченную часть, будет $M = (F/2)x$. Уравнение равновесия принимает вид

$$EIy'' = -\frac{F}{2}x \qquad \left(x\leqslant\frac{l}{2}\right). \tag{80.10}$$

Теперь ось Y направлена вниз, т. е. в сторону выпуклости балки. Производная y'' отрицательна. По этой причине правая часть взята со знаком минус. Интегрируя полученное уравнение и учитывая, что $y' = 0$ при $x = l/2$, $y = 0$ при $x = 0$, найдем

$$y=\frac{Fx}{48EI}(3l^2-4x^2) \qquad \left(x\leqslant\frac{l}{2}\right). \tag{80.11}$$

Полагая здесь $x = l/2$, находим стрелу прогиба

$$\lambda=\frac{Fl^3}{48EI}. \tag{80.12}$$

Этот результат можно также получить из формулы (80.9). Действительно, в точке O' касательная к нейтральной линии изогнутой балки горизонтальна (рис. 210). Если мысленно разрезать балку нормальным сечением, проведенным через O', на две равные части, то каждая половина будет эквивалентна балке, жестко закрепленной одним концом в точке O' и подверженной на свободном конце действию сосредоточенной силы $F/2$, направленной вверх. Следовательно, стрела прогиба центра балки найдется из формулы (80.9), если в ней сделать замену $F \to F/2$, $l \to l/2$. Это дает

$$\lambda = \frac{1}{3EI}\frac{F}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^3 = \frac{Fl^3}{48EI},$$

т. е. прежний результат (80.12).

Пример 4. Определим стрелу прогиба центра однородной балки с жестко закрепленными концами под действием сосредоточенной силы F, приложенной к ее середине (рис. 211). Снова будем пренебрегать весом балки. Когда балка свободно лежала на двух опорах (рис. 210), влияние последних сводилось к силам $F/2$ и $F/2$, с которыми точечные опоры давили на балку. В случае балки с жестко закрепленными концами результирующая сил реакций опоры, действующих

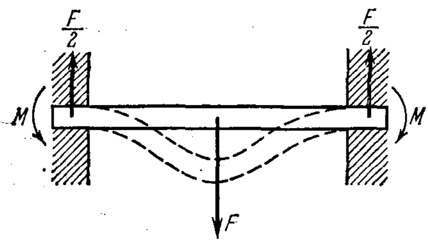

Рис. 211.

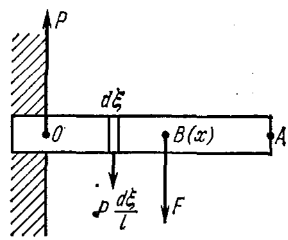

Рис. 212.

на какой-либо конец балки, по-прежнему равна $F/2$. Но помимо этого силы реакции создают вращающий момент M, действующий на балку. Поэтому вместо уравнения (80.10) надо писать

$$EIy'' = -\frac{F}{2}x + M \qquad \left(x \leqslant \frac{l}{2}\right), \tag{80.13}$$

считая вращательный момент M неизвестным и подлежащим определению. Уравнение надо решить при условиях: 1) $y' = 0$ при $x = 0$, 2) $y' = 0$ при $x = l/2$, 3) $y = 0$ при $x = 0$. Это дает

$$\begin{gathered} M = \frac{Fl}{8}, \\ y = \frac{Fx^2}{16EI}\left(l - \frac{4}{3}x\right), \\ \lambda = \frac{Fl^3}{192EI}. \end{gathered} \tag{80.14}$$

Пример 5. Рассмотрим теперь изгиб балки под действием собственного веса P, предполагая, что один конец ее закреплен в стене, а другой свободен (рис. 212). Для равновесия всей балки необходимо, чтобы стена действовала на конец балки O с силой, направленной вверх равной ее весу P. Проведем нормальное сечение через произвольную точку $B(x)$ нейтральной линии (с координатой $OB = x$). В примере 2 при решении аналогичной задачи мы исходили из условия равновесия части балки BA. Так же можно было бы поступить и при решении рассматриваемой задачи. Однако мы хотим теперь воспользоваться условием равновесия другой части балки, OB, чтобы показать, как поступать в этом случае. Пусть

F — сила, действующая на правый конец рассматриваемой части балки OB со стороны части BA. Вес части OB равен Px/l. Для равновесия этой части необходимо условие $P = F + Px/l$ или $F = P(1 - x/l)$. На элемент балки $d\xi$ действует сила веса $P\frac{d\xi}{l}$. Момент M_1 всех вертикальных сил, действующих на часть OB, не зависит от положения оси, относительно которой он берется. Возьмем в качестве таковой ось, проходящую через конец O. Получим

$$M_1 = Fx + \int_0^x P\xi \frac{d\xi}{l} = Px - P\frac{x^2}{2l}.$$

Сюда надо добавить еще момент горизонтальных сил упругих напряжений, действующих на закрепленный конец O. Обозначая этот момент M_2, для полного момента сил, действующих на часть OB, можем написать

$$M = Px - P\frac{x^2}{2l} + M_2. \tag{80.15}$$

Постоянную M_2 можно найти из условия равновесия всей балки OA. На ее свободном конце не действуют никакие силы и упругие напряжения. Поэтому, полагая в (80.15) $x = l$, мы найдем полный момент сил, действующих на всю балку. В равновесии он должен равняться нулю, т. е. $Pl - P\frac{l^2}{2l} + M_2 = 0$. Отсюда $M_2 = -Pl/2$. Это дает

$$M = Px - P\frac{x^2}{2l} - P\frac{l}{2}. \tag{80.16}$$

Уравнение равновесия части балки OB принимает вид

$$EIy'' = -Px + P\frac{x^2}{2l} + P\frac{l}{2}.$$

Решая его при условиях: 1) $y' = 0$ при $x = 0$, 2) $y = 0$ при $x = 0$, получим

$$y = \frac{P}{4EI}lx^2 - \frac{P}{6EI}x^3 + \frac{P}{24EI}\frac{x^4}{l}. \tag{80.17}$$

Полагая здесь $x = l$, находим стрелу прогиба свободного конца балки

$$\lambda = \frac{P}{8EI}l^3. \tag{80.18}$$

Если на свободный конец балки действует еще внешняя сила F, направленная вниз, то вместо формул (80.16) и (80.18) нетрудно получить

$$M = F(x - l) + Px - P\frac{x^2}{2l} - \frac{Pl}{2}, \tag{80.19}$$

$$\lambda = \frac{l^3}{EI}\left(\frac{F}{3} + \frac{P}{8}\right). \tag{80.20}$$

Результирующий прогиб, таким образом, равен сумме прогибов, получающихся при раздельном и независимом действии сил F и P. Этот результат справедлив для любых малых деформаций, а не только для деформаций изгиба, что непосредственно следует из принципа суперпозиции.

П р и м е р 6. Упругий стержень AB длины l сдавливается с концов двумя равными и противоположно направленными силами F, действующими вдоль одной прямой (рис. 213). Концы стержня, закрепленные в шарнирах, могут свободно перемещаться по направлению действия сил. При известной величине нагрузки F стержень начинает изгибаться в сторону. Это показывает, что помимо сжатого состояния стержня возможны и другие равновесные состояния его. На рис. 213 изображен стержень в таком изогнутом состоянии. Направим ось X вдоль продольной оси недеформированного стержня, а ось Y — вбок в сторону изгиба. Уравнение равновесия изогнутого стержня имеет вид

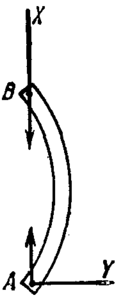

Рис. 213.

$$y'' + k^2 y = 0, \tag{80.21}$$

где введено обозначение

$$k^2 = \frac{F}{EI}. \tag{80.22}$$

Общее решение этого уравнения есть

$$y = C\cos kx + D\sin kx,$$

где C и D — постоянные интегрирования. Если начало координат поместить на одном из концов стержня, то должно быть $C = 0$. Это следует из того, что при $x = 0$ ордината должна обращаться в нуль. На другом конце, т. е. при $x = l$, ордината y также равна нулю. Значит, должно также быть $D \sin kl = 0$ *). Если $\sin kl \neq 0$, то $D = 0$, а потому $y = 0$. В этом случае стержень может быть только сжат, но не изогнут. Если же $\sin kl = 0$, т. е. $kl = \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$, то прямолинейная равновесная форма стержня хотя и является теоретически возможной, но, как легко доказать, она будет неустойчивой. Стержень принимает форму дуги синусоиды в соответствии с уравнением $y = D\sin kx$, причем постоянная D зависит от величины прогиба, т. е. в конце концов от величины нагрузки. Значения l и F, соответствующие наименьшему корню ($kl = \pi$),

$$l = \frac{\pi}{k} = \pi\sqrt{\frac{EI}{F}} \quad \text{и} \quad F = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \tag{80.23}$$

называются соответственно *критической длиной и предельной нагрузкой* при продольном изгибе. Эти величины можно рассматривать как предельные значения длины или нагрузки, при которых стержень начнет изгибаться в сторону, если только до этого он не был разрушен действующими силами.

Рис. 214.

Если оба конца стержня жестко закреплены (рис. 214), то надо учесть дополнительные моменты сил, действующие на концах стержня, подобно тому, как это делалось в примере 4. Вместо уравнения (80.21) теперь надо решать уравнение

$$y'' + k^2 y = k^2 C,$$

где C — постоянная, подлежащая определению. Общее решение этого уравнения:

$$y = A\cos kx + B\sin kx + C.$$

Условие $y = 0$ при $x = 0$ дает $A + C = 0$. Из второго условия $y' = 0$ при $x = 0$ получаем $B = 0$, так что

$$y = A(\cos kx - 1).$$

*) Строго говоря, под l здесь следует понимать не длину самого стержня, а расстояние вдоль прямой между концами изогнутого стержня. Это расстояние, очевидно, меняется с изменением нагрузки и является величиной, подлежащей определению. Однако при малых деформациях такое уточнение несущественно, и под l можно понимать длину самого стержня.

Надо еще потребовать, чтобы y и y' обращались в нуль и на другом конце стержня. Это дает два новых условия: 1) $\cos kl = 1$, 2) $\sin kl = 0$. Из них получаем $kl = 2\pi, 4\pi, \ldots$ Критическая длина в этом случае в два, а предельная нагрузка — в четыре раза больше, чем в предыдущем:

$$l = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{EI}{F}}, \qquad F = \frac{4\pi^2 EI}{l^2}. \tag{80.24}$$

Если один конец стержня жестко закреплен, а другой закреплен в шарнире, то для тех же величин получаем

$$l = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{EI}{F}}, \qquad F = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}. \tag{80.25}$$

ЗАДАЧИ

1. Определить стрелу прогиба центра однородной балки под действием собственного веса P, если балка лежит своими концами на двух опорах.

Ответ. $\lambda = \frac{5}{384}\frac{Pl^3}{EI}$.

2. То же для балки, обоими концами жестко закрепленной в стене.

Ответ. $\lambda = \frac{1}{384}\frac{Pl^3}{EI}$.

3. Определить распределение веса P балки, лежащей на трех опорах A, B, C (рис. 215). Средняя опора C расположена посередине между крайними опорами A и B и смещена на λ вниз относительно горизонтальной плоскости, в которой лежат крайние опоры.

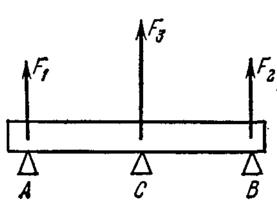

Рис. 215.

Решение. При равновесии $F_1 + F_2 + F_3 = P$, причем в силу симметрии $F_1 = F_2$. Мысленно уберем опоры, заменив их силами F_1, F_2, F_3, с которыми они давили на балку. Кроме того, закрепим балку посередине. От этого деформации балки не изменятся. Воспользуемся формулами (80.9) и (80.18). Под действием силы F_1 левый конец балки поднимется относительно средней опоры на величину $y_1 = \frac{F_1}{3EI}\left(\frac{l}{2}\right)^3$. Под действием собственного веса тот же конец опустится вниз на $y_2 = \frac{P}{2}\frac{1}{8EI}\left(\frac{l}{2}\right)^3$. Общее поднятие вверх будет $y_1 - y_2$. По условию оно равно λ. В результате получим

$$F_1 = F_2 = \frac{3}{16}P + \frac{24EI\lambda}{l^3}, \qquad F_3 = \frac{5}{8}P - \frac{48EI\lambda}{l^3}.$$

Когда все три опоры находятся на одной высоте, то

$$F_1 = F_2 = \frac{3}{16}P, \qquad F_3 = \frac{5}{8}P.$$

В этом случае распределение веса балки между тремя опорами не зависит от ее упругих свойств, хотя без учета последних задача становится неопределенной (ср. § 44). Эта независимость объясняется тем, что мы не учитывали деформации самих опор.

4. Та же задача, но опора C (рис. 215) не находится посередине между опорами A и B ($AC = a$, $CB = b$).

Решение. Поместим начало координат в нейтральном сечении над опорой A, направив ось X вправо, а ось Y — вниз. Написав уравнение равновесия для частей AC ($x \leqslant a$) и CB ($x \geqslant a$) и интегрируя их при условиях $y=0$ при $x=0$ и $x=a+b\equiv l$, а также $y=\lambda$ при $x=a$, получим

$$y=\frac{\lambda}{a}x+\frac{F_1x}{6EI}(a^2-x^2)-\frac{Px}{24EIl}(a^3-x^3) \qquad (x\leqslant a),$$

$$y=\frac{\lambda}{b}(l-x)+\frac{F_2(l-x)}{6EI}[b^2-(l-x)^2]-\frac{P(l-x)}{24EIl}[b^3-(l-x)^3] \qquad (x\geqslant a).$$

Далее, надо потребовать, чтобы в точке C у балки не было излома, т. е. чтобы первые производные обоих выражений в точке $x=a$ совпадали. Наконец, надо учесть, что при равновесии сумма всех внешних сил и их моментов, действующих на балку в целом, равны нулю. В результате получим

$$F_1=\frac{3EI}{a^2b}\lambda+\frac{P}{8}\frac{3a^2+ab-b^2}{a(a+b)},$$

$$F_2=\frac{3EI}{ab^2}\lambda+\frac{P}{8}\frac{3b^2+ab-a^2}{b(a+b)},$$

$$F_3=-\frac{3EI(a+b)}{a^2b^2}\lambda+\frac{P}{8}\frac{3ab+a^2+b^2}{ab}.$$

5. Цилиндрический стержень и трубка одинаковой длины и массы, изготовленные из одного и того же материала, лежат своими концами на двух опорах и прогибаются под действием собственного веса. Определить отношение их стрел прогиба λ_1/λ_2, если радиус стержня равен r, а наружный радиус трубки R.

Ответ. $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}=\dfrac{2R^2-r^2}{r^2}$.

6. Если на две опоры положить концами бумажный лист, то он прогибается и падает под действием собственного веса. Если же лист скатать в сплошной цилиндр или свернуть в трубку, склеив его края, то получившиеся тела ведут себя как твердые. Их можно даже нагружать без заметного прогиба. Вычислив моменты инерции I_1, I_2, I_3 соответствующих поперечных сечений, объяснить явление. Длина листа бумаги (расстояние между опорами) l, ширина a, толщина h.

Ответ. $I_1=\dfrac{1}{12}ah^3$, $\quad I_2=\dfrac{1}{4\pi}(ah)^2$, $\quad I_3=\dfrac{1}{8\pi^2}a^3h$.

7. Из круглого бревна диаметра D требуется изготовить балку прямоугольного поперечного сечения, чтобы ее изгиб был минимальным. Определить ширину a и толщину h такой балки.

Ответ. $a=\dfrac{D}{2}$, $\quad b=\dfrac{\sqrt{3}}{2}D$. Задача сводится к исследованию экстремума выражения ab^3 при дополнительном условии $a^2+b^2=\text{const}$.

§ 81. Скорость распространения продольных упругих возмущений в стержнях

1. Если в каком-либо месте упругой среды возникла деформация, то по прекращении внешних воздействий она не остается на месте, а распространяется в среде во всех направлениях. В таких случаях говорят о распространении в среде *упругих возмущений* или *волн*. Примерами могут служить звуковые волны в твердых телах, жидкостях или газах. Закрепим, например, в горизонтальном положении длинный железный стержень. Если ударить молотком по одному